

Gato, Gota, Toga... A Combinatória no 5º Ano do Ensino Fundamental

Gato, Gota, Toga... Combinatorics In The 5th Grade of Elementary School

Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa^a; Laís Thalita Bezerra dos Santos^{a*}

^aUniversidade Federal de Pernambuco, PE, Brasil

*E-mail: laisthalita@hotmail.com

Resumo

O presente estudo analisou como intervenções baseadas na explicitação dos invariantes dos problemas combinatórios, na listagem de possibilidades como estratégia de resolução, na sistematização da listagem e na generalização (percepção das regularidades dos problemas) podem facilitar a compreensão de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental sobre problemas combinatórios dos tipos: produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação. Foram realizados pré-teste, duas sessões de intervenção e pós-teste e comparados os desempenhos, observando-se as contribuições das intervenções. Os alunos demonstraram que compreenderam os problemas combinatórios a partir da forma como foram trabalhados, mostrando-se capazes de resolver os problemas e, em parte, generalizar seus procedimentos.

Palavras-chave: Combinatória. Intervenções. Tipos de Problemas Combinatórios. Estratégias de Resolução de Problemas.

Abstract

This study examined how interventions based on the explicitness of invariants of combinatorial problems, listing of possibilities as resolution strategy, systematization of listing, and generalization (perception of regularity of problems) can facilitate the comprehension of combinatorial problems by students in 5th grade of elementary school for Cartesian product types: arrangement, combination and permutation. Were performed pre-test, two sessions of interventions and post-test and compared the performances, observing the contributions of the interventions. The students demonstrated that they understood the combinatorial problems departing from the way they were solved, showing they are able to solve the problems and, in part, generalize their procedures.

Keywords: Combinatorics. Interventions. Types of Combinatorial Problems. Strategies for Problem Solving.

1 Introdução

Hipóteses levantadas por alunos de diferentes anos escolares para resolverem situações-problema, assim como a explicitação delas por meio de estratégias, devem ser vistas pela escola como uma oportunidade de perceber o entendimento que esses alunos apresentam sobre determinados conceitos. Essas estratégias, por sua vez, podem ser boas alternativas para o ensino.

Pessoa e Borba (2009a) apresentam como um dos seus resultados as estratégias desenvolvidas por 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas de combinatória (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Essas estratégias eram, por vezes, bem sucedidas em encontrar soluções corretas e, em outras ocasiões, iniciavam-se corretamente, mas não eram totalmente bem sucedidas em se chegar ao resultado final correto.

Em estudo desenvolvido por Pessoa e Santos (2011), os resultados mostram diversificadas estratégias de alunos a fim de resolverem problemas combinatórios. Nesse estudo, as autoras levantaram, além das estratégias, as explicações dos alunos pesquisados sobre o entendimento que os mesmos tiveram no que se refere a cada problema combinatório, sendo

possível verificar quais as dificuldades/facilidades deles em relação aos invariantes de cada situação.

Em ambos os estudos, a *listagem* de possibilidades foi a estratégia mais utilizada pelos alunos. Além disso, percebeu-se que os alunos que utilizavam uma estratégia mais sistematizada obtinham mais sucesso do que os que não sistematizavam seus procedimentos. Percebeu-se também que alunos em estágios mais avançados de desenvolvimento do raciocínio combinatório conseguiam perceber a regularidade da resolução do problema e, assim, generalizavam seus procedimentos. Por exemplo, ao listar as possibilidades de um determinado problema, o aluno percebe, a partir da pista da sua própria estratégia, que não necessita da apresentação de todas as possibilidades e encerra realizando um procedimento mais formal, como uma multiplicação. Além das pistas fornecidas através das estratégias utilizadas pelos alunos pesquisados em estudos de sondagem anteriores, acredita-se que a explicitação e o destaque para os *invariantes*, ou seja, as características próprias de cada tipo/*significado* de problema combinatório (arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano) pode ajudar os alunos a melhor compreenderem o conceito.

Portanto, no estudo atual objetivou-se utilizar a estratégia que mais se destacou nos estudos analisados, a

listagem de possibilidades, juntamente com os três outros pilares considerados fundamentais para a aprendizagem da combinatória, que são os *invariantes* de cada tipo de problema combinatório, a *sistematização* da listagem e a *generalização*. Tais pilares foram tomados como ponto de partida para a elaboração e execução de intervenções que possam auxiliar no ensino-aprendizagem da combinatória com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, a fim de analisar os esperados avanços e as contribuições de tais intervenções no que se refere à compreensão da combinatória.

2 Material e Métodos

2.1 A combinatória

De acordo com Pessoa e Borba (2009b) a combinatória permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um. Assim, no presente estudo, entende-se o *raciocínio combinatório* como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Na combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem. Assim, a *Análise Combinatória* é a parte da Matemática que estuda os agrupamentos a partir de alguns critérios; a *combinatória* é o assunto referente a esta parte da Matemática e que está diretamente relacionada com os problemas de produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação; o *raciocínio combinatório* é a forma de pensar referente à combinatória; e *combinação* é um dos significados dos problemas de combinatória, juntamente com arranjo, produto cartesiano e permutação.

Pessoa e Borba (2009a) classificam os problemas que envolvem o raciocínio combinatório em uma organização única – não identificada em estudos anteriores. A seguir estão colocados os *significados*¹ presentes na combinatória (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação) e seus respectivos *invariantes do conceito*, ou seja, relações e propriedades que se mantêm constantes:

Produto Cartesiano (1) Dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto; (2) A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado. Permutação (1) Todos os elementos

do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as permutações. Arranjo (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais; (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que de um grupo maior, alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Combinação (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais; (2). A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. De forma semelhante aos problemas de arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Apesar da importância de estudos que envolvam o raciocínio combinatório, poucas são as pesquisas que objetivam investigá-lo propondo intervenções de ensino envolvendo uma amplitude de situações combinatórias, como as que envolvem os arranjos, as combinações, as permutações e os produtos cartesianos. Como exemplos de estudos anteriores relacionados à combinatória envolvendo os quatro tipos de problemas, Azevedo, Costa e Borba (2011), em um estudo com o *software Árbol*, trabalharam os quatro tipos de problemas com 16 alunos do 5º ano e perceberam progressos na compreensão da combinatória. Outro estudo que trabalhou com a intervenção foi o de Barreto e Borba (2011), que investigou o uso de estratégias específicas (*listagem e árvore de possibilidades*) com alunos da Educação de Jovens e Adultos. Neste estudo, tanto os alunos que trabalharam com *listagem de possibilidades*, quanto os que trabalharam com a *árvore de possibilidades* apresentaram importantes avanços.

Já no que se refere aos estudos que investigaram tipos específicos de problemas, Inhelder e Piaget (1955) estudaram a resolução de problemas de tipo permutação por parte de alunos com idade em torno de 12 anos; Soares e Moro (2006) investigaram a resolução de problemas de produto cartesiano por alunos de 5ª e 6ª série (atuais 6º e 7º anos de escolarização); Schliemann (1988), numa investigação com adultos escolarizados e com pouca escolarização, trabalhou com problemas de tipo permutação; e Miguel e Magina (2003) investigaram com alunos do 1º ano de licenciatura em matemática as estratégias de resolução de permutações simples e com repetição, arranjos simples e com repetição e combinações.

¹ É importante deixar claro que, nesse trabalho, os *significados de problemas de combinatória* refere-se aos *tipos de problemas de combinatória*, ou seja, os tipos de problemas estão aqui considerados em termos de diferentes significados que a combinatória pode assumir. Cada um dos significados possui invariantes diferentes, mas são todos problemas combinatórios porque possuem a característica de levantamento de possibilidades – por contagem direta ou indireta.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) apontam a necessidade de que a combinatória seja trabalhada desde os anos iniciais da escolaridade; entretanto, apesar dessa recomendação, na prática de sala de aula, a maioria dos problemas de raciocínio combinatório (arranjo, combinação e permutação) só é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio. Apenas o do tipo produto cartesiano é trabalhado explicitamente nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Ainda assim, estudos como o de Pessoa e Borba (2009b) mostram que é possível desenvolver compreensões sobre esses tipos de problemas antes de sua introdução formal na escola e que os alunos são capazes de desenvolver estratégias para resolver problemas combinatórios dos diferentes tipos.

Em relação à resolução de problemas, pode-se pensar nestas situações que geram conflito e cujas soluções não são óbvias, ou seja, quando um aluno recorre ao conjunto de respostas imediatamente disponível e não obtém sucesso na solução, está frente a um problema. Ele deve, então, criar uma saída própria. A escolha pode ser por um procedimento mais formal, como as regras e algoritmos que seguem sempre a mesma ordem de passos de solução, ou uma heurística que é menos formal, no sentido de ser adequada a cada situação.

Apesar dos estudos já existentes em relação à combinatória, justifica-se a realização de pesquisas, como a atual, que, a partir dos dados obtidos em estudos de sondagem (PESSOA; BORBA, 2009a; PESSOA; SANTOS, 2011) investiguem mais aprofundadamente o raciocínio combinatório, desenvolvendo intervenções que possibilitem uma compreensão mais ampla da combinatória.

Os objetivos são os de experimentar com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental intervenções baseadas nas estratégias bem sucedidas evidenciadas pelos alunos nos estudos de Pessoa e Borba (2009a) e Pessoa e Santos (2011), utilizando a explicitação dos *invariantes* dos problemas combinatórios, a *listagem* de possibilidades como estratégia, a *sistematização* da listagem e a *generalização* de procedimentos; comparar o desempenho dos alunos em relação à Combinatória, entre o pré-teste e o pós-teste e analisar as estratégias e os tipos de respostas utilizados pelos alunos pesquisados antes e após as intervenções.

2.2 Metodologia

A princípio, foi realizado o levantamento das estratégias bem sucedidas obtidas nos estudos de Pessoa e Borba (2009a) e de Pessoa e Santos (2011), a fim de que as mesmas fossem utilizadas durante as intervenções. Após esse momento, buscou-se uma escola que apresentasse disponibilidade em receber as pesquisadoras.

A hipótese defendida no presente estudo é a de que o uso da *listagem* de possibilidades como estratégia, o destaque para os *invariantes* de cada tipo de problema combinatório,

a *sistematização* da listagem e a *generalização* facilitam a compreensão da combinatória, sendo essa a forma de intervenção adotada para ser trabalhada com os alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental. A turma era composta por cerca de 20 alunos com idades variando entre 10 e 12 anos, mas foram selecionados para a análise apenas os que fizeram parte dos quatro momentos do processo: pré-teste, duas sessões de intervenção e pós-teste, com 13 participantes.

Para a realização da pesquisa, foram apresentados os quatro tipos de problemas combinatórios estando esses divididos em duas sessões, as quais tiveram, cada uma, duração de, em média, uma hora e trinta minutos, a depender do avanço e entendimento da turma. Essas sessões foram organizadas como segue:

Na primeira sessão de intervenção foram trabalhados com os alunos seis problemas, sendo os três primeiros de produto cartesiano e os três últimos de permutação. Assim como na primeira, na segunda sessão de intervenção foram trabalhados seis problemas, sendo os três primeiros do tipo combinação e os três últimos do tipo arranjo. Nas duas intervenções, o primeiro problema de cada um dos tipos resultava em um número menor de possibilidades (grandeza numérica até 10) e o segundo e o terceiro problema levavam a um número maior de possibilidades (grandeza numérica até 30).

A organização das intervenções pode ser visualizada no Quadro 1, que segue.

Quadro 1: Organização das Intervenções

Interv.	1º Prob. (NP) ²	2º Prob. (NG)	3º Prob. (NG)	4º Prob. (NP)	5º Prob. (NG)	6º Prob. (NG)
1ª sessão	PC	PC	PC	Perm.	Perm.	Perm.
2ª sessão	Comb.	Comb.	Comb.	Arranjo	Arranjo	Arranjo

Em ambas as sessões de intervenção foram resolvidos, com o conjunto da turma, os problemas do pré-teste (na organização do teste, os 1º, 2º, 4º e 5º problemas) de modo que fosse possível tirar dúvidas dos alunos e destacar os *invariantes* de cada tipo de problema combinatório que eles já haviam resolvido anteriormente (no momento da aplicação do pré-teste). Além disso, foi apresentada, de cada um dos problemas combinatórios, uma situação-problema ainda não conhecida pelos alunos (3º e 6º problemas), de modo que fosse possível perceber se eles estavam compreendendo o que estava sendo trabalhado. O objetivo era o de que os alunos, após trabalharem os problemas já resolvidos por eles (no pré-teste) e de terem certo entendimento sobre os *invariantes*, tentassem resolver sozinhos outros problemas do mesmo tipo combinatório (por isso a presença do 3º e 6º problemas).

2 NP = números pequenos (problemas que resultavam em um número menor de possibilidades); NG = números grandes (problemas que resultavam em um número maior de possibilidades); PC = Produto Cartesiano; Perm. = Permutação; Comb. = Combinação.

Os problemas trabalhados no pré-teste, nas sessões de intervenção e no pós-teste foram os seguintes:

Pré-teste:

- 1) Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas?
- 2) Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?
- 3) Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Laís, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas?
- 4) Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?
- 5) Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos conjuntos ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts?
- 6) A Semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: África, Brasil, França e Alemanha. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado nessa disputa?
- 7) Para a festa de aniversário de Amanda poderão ser convidados cinco amigos entre os sete (Lívia, Cintia, Giselle, Joaquim, Pedro, Allan e Gabriela) que moram na sua rua. Quantos grupos diferentes de cinco amigos Camila poderá formar para ir à sua festa?
- 8) Elizabete quer criar uma senha para que outras pessoas não mexam no seu celular. Sabendo que ela só pode usar os números 1, 2, 3 e 4, sem repeti-los na mesma senha, de quantas maneiras diferentes Elizabete poderá criar essa senha?

1ª Intervenção:

- 1) Resolução e discussão - 1º problema do pré-teste (ver pré-teste)
- 2) Resolução e discussão - 5º problema do pré-teste (ver pré-teste)
- 3) Novo problema apresentado: A mãe de Pedrinho fez oito tipos de suco (maracujá, laranja, acerola, goiaba, uva, manga, abacaxi e caju) para a comemoração do dia das crianças na escola do seu filho. Ela levou copos descartáveis de quatro cores (amarelo, branco, cinza e preto). Quantas combinações diferentes poderão ser formadas, combinando todos os sucos com todos os copos?
- 4) Resolução e discussão - 4º problema do pré-teste (ver pré-teste)
- 5) Resolução e discussão - 8º problema do pré-teste (ver pré-teste)
- 6) Novo problema apresentado: Mayara foi à sorveteria e

pediu um sorvete com quatro bolas: morango, chocolate e flocos e baunilha. Se forem colocadas uma em cima da outra, de quantas maneiras diferentes as bolas de sorvete podem ser colocadas na casquinha?

2ª Intervenção:

- 1) Resolução e discussão – 3º problema do pré-teste (ver pré-teste)
- 2) Resolução e discussão – 7º problema do pré-teste (ver pré-teste)
- 3) Novo problema apresentado: Para brincar no pula pula do parque, podem entrar duas crianças de cada vez. Amanda, Lívia, Gisele, Joaquim, Lorena, Marcos, Pedro e Fabiana estão aguardando para brincar. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas as duplas para entrar no pula pula?
- 4) Resolução e discussão – 2º problema do pré-teste (ver pré-teste)
- 5) Resolução e discussão – 6º problema do pré-teste (ver pré-teste)
- 6) Novo problema apresentado: Jane, Neide, Vanessa e Paula estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes poderemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada na disputa?

Pós-teste:

- 1) Juliana é jogadora de tênis e tem quatro raquetes (vermelha, azul, preta e marrom) e duas bolinhas (amarela e verde) para jogar no torneio. Quantas combinações diferentes ela pode formar, combinando todas as raquetes com todas as bolinhas?
- 2) Raul, Vicente e Artur estão sentados em um sofá de três lugares, sendo que Raul está no primeiro assento, Vicente está no segundo e Artur está no terceiro. Trocando os três meninos de lugar, em quais outras posições diferentes podem sentar Raul, Vicente e Artur?
- 3) Uma lanchonete tem à disposição cinco variedades de frutas (morango, laranja, pêra, banana e graviola) e pretende misturá-las duas a duas na fabricação de sucos. Quantos serão os tipos de sucos disponíveis?
- 4) Maurício, Tânia e André formam a comissão de eventos da escola. Eles precisam escolher entre eles um presidente e um vice. De quantas formas diferentes poderemos ter essa escolha?
- 5) Uma padaria prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de oito tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite, mandioca, laranja e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando cada tamanho com cada sabor?
- 6) Sem repetir as letras na mesma palavra, quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) podemos formar com as letras da palavra GATO?
- 7) A Professora do 4º ano elaborou uma prova com seis questões (A, B, C, D, E, F), das quais os alunos deveriam resolver apenas três. De quantas formas eles poderão escolher as três questões?

8) Em um concurso de beleza organizado pelo bairro, quatro meninas (Bruna, Roberta, Helena e Bianca) são as finalistas. De quantas maneiras distintas podemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada?

Trabalhou-se da seguinte forma: inicialmente foi resolvido com os alunos (no quadro-negro) o primeiro problema, havendo destaque para os *invariantes* do mesmo. Após esse momento, pediu-se que eles respondessem, individualmente, ao segundo problema. Dado o tempo para que os alunos respondessem, foi feita a resolução também no quadro, estimulando sempre a participação da turma. O processo foi repetido durante a resolução do terceiro problema. Primeiro os alunos responderam de modo mais individual e depois ocorreu a resolução em conjunto, no quadro. Tal modo de intervenção ocorreu de forma similar com cada um dos tipos de problemas combinatórios.

Destaca-se que a *listagem das possibilidades* foi a primeira orientação e a estratégia estimulada e trabalhada na resolução de todos os problemas usados nas intervenções. Foi destacada também, durante a resolução de todos os tipos de problemas, a *sistematização*, um dos pilares adotados, sendo trabalhado da seguinte forma: sempre que se iniciava a resolução de um problema no quadro, era dada a sugestão de que tal escrita fosse feita de forma organizada. Para a “organização”, sugeriu-se a *sistematização*, de modo que a ordem na qual os elementos aparecessem no enunciado fosse o ponto de partida no momento de escrever as possibilidades, o que tornava a resolução mais fácil, visto que a probabilidade de confundir os elementos seria menor.

A seguir é possível visualizar o que se destacou nas intervenções. Para tal caracterização, será tomada como exemplo uma das situações-problema para cada tipo de problema combinatório:

1ª Intervenção: Produto Cartesiano - *A mãe de Pedrinho fez oito tipos de suco (maracujá, laranja, acerola, goiaba, uva, manga, abacaxi e caju) para a comemoração do dia das crianças na escola do seu filho. Ela levou copos descartáveis de quatro cores (amarelo, branco, cinza e preto). Quantas combinações diferentes poderão ser formadas, combinando todos os sucos com todos os copos?*

Focou-se nos *invariantes*, destacando o fato de que existiam dois grupos (sucos – oito tipos, e copos – quatro cores) e que para formar as combinações possíveis, seria necessário retirar um elemento de cada grupo, formando assim um terceiro conjunto. Além disso, questionou-se os alunos sobre a ordem exercer ou não influência, levando-os a refletir sobre o fato de que, nesse tipo de problema, formadas as combinações, a ordem não gera novas possibilidades. Utilizou-se a exemplificação de uma primeira combinação: dizer que se tem a combinação suco de maracujá e copo amarelo é o mesmo que dizer que tem-se a combinação copo amarelo e suco de maracujá. A ordem na qual os elementos estão dispostos não exerce influência na resolução desse tipo de problema combinatório.

Para destacar a *generalização*, chamou-se atenção para

o fato de que se para cada tipo de suco disponível havia a possibilidade de combinação com quatro cores diferentes de copos, e que existiam 8 tipos de sucos, a multiplicação 4×8 responderia ao problema.

Permutação – *Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?*

Escrevendo os nomes “pai”, “mãe” e “irmão” no quadro, foi perguntado aos alunos quais arrumações eram possíveis. Sempre partindo do uso da *listagem de possibilidades* como estratégia, supondo-se que estavam no quadro as seguintes possibilidades: “pai, mãe e irmão; mãe, pai e irmão; irmão, mãe e pai”, perguntava-se: “Mas só há essas possibilidades? O porta-retrato do pai só pode vir em primeiro lugar uma vez, que é acompanhado da mãe e do irmão?”, “Será que não tem outras formas de organizar?” Essas questões, de certa forma, enfatizam um dos *invariantes* da permutação, segundo o qual a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Quando já haviam sido escritas todas as possibilidades, era feita a *generalização*, junto com eles. “Quantas possibilidades nós temos nas quais aparecem o pai em primeiro lugar?” Feita a contagem, eles diziam: “duas”. A pergunta era repetida com a mãe e o irmão, levando-os a perceber que para cada elemento, havia duas possibilidades de organização. Assim, a multiplicação 2×3 também resolvia o problema, sem que fosse necessário escrever todas as possibilidades.

2ª Intervenção: Combinação – *Para brincar no pula pula do parque, podem entrar duas crianças de cada vez. Amanda, Lívia, Gisele, Joaquim, Lorena, Marcos, Pedro e Fabiana estão aguardando para brincar. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas as duplas para entrar no pula pula?*

Para destacar os *invariantes*, foi dada ênfase ao fato de que o problema enumerava vários elementos, mas que nem todos seriam utilizados, de uma só vez, na formação das possibilidades. Além disso, os alunos foram levados a refletir sobre a importância ou não da ordem, com a pergunta: “Dizer que “Amanda e Lívia é a dupla que vai entrar na pula-pula” ou “Dizer que Lívia e Amanda é a dupla que vai entrar no pula-pula”, vai fazer diferença?” Com tal pergunta, o objetivo era o de chamar a atenção para o fato de que, nesse tipo de problema, a ordem não exerce influência durante a formação das possibilidades.

Arranjo – *Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?*

Visando à percepção dos *invariantes*, chamou-se a atenção para o fato de que nesse tipo de problema é fornecido um grupo e desse grupo são retirados elementos para formar subgrupos. Perguntou-se também se as combinações “Joana e Vitória” e “Vitória e Joana” eram diferentes.

Sobre a *generalização*, ainda tomando como exemplo o

problema acima colocado, os alunos eram levados a perceber quantas vezes cada um dos elementos (acompanhados dos vices), poderiam ser colocados em primeiro lugar (como prefeitos, no caso). Assim, chegando-se à conclusão de que cada um deles poderia ocupar o primeiro lugar, com segundos lugares (vices) diferentes, por duas vezes, e que a quantidade de elementos era de três, uma possível solução para o problema seria a multiplicação 2×3 , que resulta na resposta seis possibilidades.

Assim, os objetivos do presente estudo são os de analisar os avanços quantitativos e qualitativos dos alunos pesquisados, entre pré-teste e pós-teste, e as contribuições das intervenções para o entendimento da combinatória por eles.

A análise dos dados ocorreu de forma quantitativa, comparando-se o desempenho em termos de acertos totais³ dos alunos entre o pré-teste e o pós-teste, e de forma qualitativa, analisando-se os tipos de respostas e as estratégias desenvolvidas pelos alunos também entre o pré-teste e o pós-teste. Nesta segunda análise são considerados acertos parciais,

ou seja, caminhos que foram utilizados pelos alunos e que demonstram certa compreensão dos problemas.

3 Resultados e Discussão

A princípio, apresenta-se o levantamento dos acertos totais dos alunos, tanto no pré-teste como no pós-teste. Adiante, tais resultados serão refinados e analisados mais detalhadamente, de modo a observar as formas de resoluções encontradas, percebendo possíveis avanços não só na quantidade de acertos, mas também na qualidade das respostas e no nível de compreensão dos problemas combinatórios.

3.1 Análise de acertos totais

A seguir, apresentam-se os Quadros 2 e 3, que contêm os acertos totais dos alunos no pré-teste e no pós-teste para se poder melhor perceber a mudança de desempenho possivelmente advinda dos momentos de intervenção, nos quais foram destacados os quatro pilares já discutidos: *listagem de possibilidades* como estratégia, *invariantes*, a *sistematização* e a *generalização*.

Quadro 2: Acertos Totais por aluno no Pré-teste

Alunos	Problemas								Total de Acertos
	PC- ⁴	PC+	Arr-	Arr+	Comb-	Comb+	Perm-	Perm+	
Aluno 1									0
Aluno 2	X				X				2
Aluno 3	X				X				2
Aluno 4									0
Aluno 5									0
Aluno 6					X				1
Aluno 7									0
Aluno 8									0
Aluno 9									0
Aluno 10	X								1
Aluno 11									0
Aluno 12									0
Aluno 13									0

Quadro 3: Acertos Totais por aluno no Pós-teste

Alunos	Problemas								Total de Acertos
	PC-	PC+	Arr-	Arr+	Comb-	Comb+	Perm-	Perm+	
Aluno 1	X								1
Aluno 2	X		X						2
Aluno 3	X	X	X		X		X		5
Aluno 4		X			X				2
Aluno 5	X	X	X				X		4
Aluno 6					X				1
Aluno 7	X	X	X	X	X		X		6
Aluno 8	X	X	X				X		4
Aluno 9	X	X			X				3
Aluno 10	X	X	X			X	X		5
Aluno 11		X							1
Aluno 12									0
Aluno 13	X	X			X				3

³ Está sendo considerado aqui como acerto total quando o aluno consegue chegar ao resultado do problema, independentemente da estratégia utilizada.

⁴ PC- = Produto Cartesiano com número menor de possibilidades; PC+ = Produto Cartesiano com número maior de possibilidades; Arr- = Arranjo com número menor de possibilidades; Arr+ = Arranjo com número maior de possibilidades; Comb- = Combinação com número menor de possibilidades; Comb+ = Combinação com número maior de possibilidades; Per- = Permutação com número menor de possibilidades; Perm+ = Permutação com número maior de possibilidades.

Adiante, na Tabela 1, apresenta-se a comparação entre os percentuais de acertos no pré-teste e pós-teste, de modo que seja possível comparar os avanços dos alunos.

Tabela 1: Comparação do Percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste

	PC-	PC+	Arr-	Arr+	Comb-	Comb+	Perm-	Perm+
Pré-teste	23,07	0	0	0	23,07	0	0	0
Pós-teste	69,23	69,23	46,15	7,69	46,15	7,69	38,46	0

A partir dos dados apresentados (mais especificamente Quadros 2 e 3 e Tabela 1), é possível perceber importantes avanços no que se refere à aprendizagem de combinatória quando o conteúdo é trabalhado de forma sistemática em sala de aula, o que demonstra que os pilares adotados durante as intervenções parecem contribuir de forma importante para que os alunos resolvam de maneira mais correta os problemas e melhor reflitam sobre a combinatória. É possível perceber que alunos que antes apresentavam percentuais mais baixos de acertos totais, passaram a solucionar de forma correta os problemas propostos.

Dentre os 13 alunos pesquisados, 10 apresentaram avanços no que se refere à quantidade de acertos totais. Apenas três alunos (2, 6 e 12), permaneceram com a mesma quantidade de acertos totais no pré-teste e no pós-teste. Ainda assim, adiante, com uma análise mais detalhada das respostas por eles e pelos demais alunos apresentadas, é possível perceber avanços no que se refere ao nível de compreensão dos problemas, tendo em vista que eles evoluíram no que se refere à qualidade das estratégias apresentadas, mesmo que não tenham, ainda, esgotado todas as possibilidades.

No pré-teste, os acertos totais ocorreram no problema de produto cartesiano com número menor de possibilidades, respondido pelos alunos 2, 3 e 10 e no problema de combinação com número menor de possibilidades, respondido pelos alunos 2, 3 e 6. No estudo de Pessoa e Santos (2011), o problema de combinação foi apresentado como o de mais fácil resolução pelos alunos, seguidos dos problemas de produto cartesiano, permutação e arranjo. Tal resultado assemelha-se aos encontrados no estudo atual (pré-teste), no qual os alunos aparentam ter mais facilidade para resolver os problemas de combinação e produto cartesiano.

Já no pós-teste, pode-se perceber que houve acertos totais em todos os tipos de problemas combinatórios, exceto no de permutação com número maior de possibilidades. Explicação para tal pode ser encontrada no contexto no qual tal problema estava inserido, que era o anagrama da palavra GATO. Tanto no presente estudo como no de Pessoa e Santos (2011), os alunos demonstraram dificuldades na resolução desse tipo de problema.

No que se refere aos problemas que levavam a um número maior de possibilidades, nos do tipo produto cartesiano, os alunos avançaram bastante, de zero para nove resoluções corretas. Já nos problemas de arranjo e combinação (com número maior de possibilidades) para cada um dos problemas citados só houve

um acerto (no pós-teste). É mais difícil generalizar/esgotar as possibilidades com número maior de possibilidades e com problemas menos comuns.

3.2 Análise das estratégias e dos tipos de respostas apresentados pelos alunos

Como afirmado durante a análise direcionada para os acertos totais e para a análise quantitativa foram considerados como acertos apenas os acertos totais. Porém, entre acertos e erros há um enorme espectro de possibilidades, de estratégias e tipos de respostas que levam a reflexão sobre como os alunos pensam em relação à combinatória. Desse modo, a seguir é feita uma abordagem de cunho mais qualitativo, de modo a verificar, além da quantidade de acertos, em quais aspectos, no âmbito de tipos de respostas e de estratégias, os alunos apresentaram avanços após as intervenções.

A partir de categorização desenvolvida por Pessoa e Borba (2009a) sobre os tipos de respostas e os tipos de estratégias desenvolvidos pelos alunos por elas pesquisados, foram classificados os tipos de respostas (Quadro 4) e os tipos de estratégias (Quadro 5) dos alunos da presente pesquisa.

Quadro 4: Tipos de respostas apresentadas pelos alunos investigados ao resolverem os problemas de combinatória propostos.

1) Em branco	Não se sabe, nestes casos, se o aluno não respondeu porque não sabia, porque não se interessou, porque não quis fazer ou se considerou o problema de difícil resolução.
2) Apenas resposta incorreta	O aluno deu apenas a resposta errada para o problema proposto.
3) Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta	Incompreensão do problema – o aluno apresentou uma resposta incorreta e na sua resolução não há indícios de relação com a questão proposta. Tal percepção é possível a partir da estratégia pelo aluno apresentada.
4) Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática	Apresenta certa compreensão do problema – o aluno errou a resposta ou não conseguiu completá-la, entretanto, sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém uma relação com a lógica do problema, entretanto, não organizou sistematicamente a estratégia, listando, desenhando, fazendo árvore de possibilidades, quadros, diagramas ou outra estratégia de maneira não sistemática, sem controlar de alguma forma os elementos, não conseguindo esgotar todas as possibilidades.
5) Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática	Nesta categoria, o aluno também apresentou certa compreensão do problema, entretanto, apesar de utilizar uma estratégia mais organizada, mais sistemática, errou a resposta ou não conseguiu chegar ao final da resolução. Sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém uma relação com a lógica do problema, entretanto, na maioria das vezes, neste caso, o aluno não conseguiu esgotar todas as possibilidades para o tipo de problema proposto.
6) Apenas resposta correta	O aluno deu apenas a resposta certa para o problema proposto.
7) Resposta correta com explicitação de estratégia	O aluno conseguiu compreender a lógica do problema e chegar à resposta correta, utilizando e explicitando uma estratégia válida e encontrando formas de esgotar todas as possibilidades.

Quadro 5: Estratégias apresentadas pelos alunos ao resolverem os problemas de combinatória propostos.

1) Não explicitou estratégia	Quando o aluno apenas forneceu a resposta, correta ou incorreta. Desse modo fica difícil precisar com certeza qual estratégia foi utilizada para a resolução.
2) Desenho	O aluno desenhou as possibilidades, utilizando-se dos dados, podendo a resposta ser <i>correta</i> ou <i>incorreta</i> , havendo, ou não, <i>sistematização</i> no processo de resposta e <i>com</i> ou <i>sem</i> o <i>esgotamento de todas as possibilidades</i> .
3) Quadro / diagrama	O aluno construiu um quadro ou um diagrama para representar o processo de solução. Pode haver resposta <i>correta</i> ou <i>incorreta</i> , <i>com</i> ou <i>sem sistematização</i> , <i>com</i> ou <i>sem esgotamento de possibilidades</i> .
4) Listagem de possibilidades	O aluno listou as possibilidades de forma escrita, com os nomes ou com símbolos, podendo a resposta ser <i>correta</i> ou <i>incorreta</i> , <i>havendo</i> , ou <i>não</i> , o <i>estabelecimento de relação</i> e/ou o <i>esgotamento de todas as possibilidades</i> .
5) Multiplicação inadequada	O aluno relacionou o problema a um produto, entretanto, em situações nas quais ela não se aplica. A resposta é <i>incorreta sem relação</i> .
6) Multiplicação adequada	O aluno relacionou o problema a um produto, com a possibilidade correta de seu uso. A resposta pode ser <i>correta</i> ou <i>incorreta</i> .
7) Percepção ou busca de regularidade	Quando o aluno iniciou a resolução através de uma estratégia qualquer, geralmente a listagem ou a árvore de possibilidades ou o quadro/diagrama e, no decorrer desta, percebeu que pode generalizar as descobertas iniciais para os casos seguintes. A resposta pode ser <i>correta</i> ou <i>incorreta</i> .

Estando explicitadas as categorias utilizadas para sistematizar as respostas dos alunos pesquisados, apresentam-se as Tabelas 2 e 3, que permitem visualizar os dados, de forma sistematizada, por tipo de resposta e por ordem de grandeza, no pré-teste e pós-teste, respectivamente, de modo que seja possível comparar os avanços e verificar a influência das intervenções na compreensão combinatória pelos alunos pesquisados. Ao analisar por ordem de grandeza, têm-se o intuito de, a depender do tipo de resposta apresentado, perceber as dificuldades/facilidades dos alunos ao resolverem problemas com respostas que levavam a um número menor ou maior de possibilidades.

A partir dos dados apresentados na Tabela 2 (pré-teste), pode-se perceber, em princípio, o pequeno percentual de alunos que deixa as *respostas em branco*, o que significa que, ainda que não haja um ensino sistemático de combinatória em sala de aula, os alunos tentam resolver os problemas, utilizando-se de estratégias diferenciadas. De modo geral, a partir dos resultados encontrados no pré-teste, é possível perceber que a maior parte das respostas está em categorias que se referem a *respostas incorretas ou incompletas, sem o estabelecimento de relação combinatória*, o que indica que os alunos, em sua maioria, anteriormente às intervenções, apresentavam um pensamento combinatório ainda sem grande sistematização.

Tabela 2: Percentuais de tipo de resposta por tipo de problema e por ordem de grandeza no pré-teste.

		Em Branco	Apenas resposta incorreta	Resposta incorreta sem relação correta	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia não sistemática	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia sistemática	Apenas resposta correta	Resposta correta com explicitação de estratégia
Problemas	PC ⁵	NP ⁶	53,84	15,38	7,69		23,07	
		NG	69,23	30,76				
	Ar	NP	69,23	23,07	7,69			
		NG	38,46	53,84	7,69			
	Comb	NP	38,46	23,07			7,69	15,38
		NG	7,69	76,92	15,38	7,69		
	Perm	NP		53,84	30,76	7,69	7,69	
		NG	7,69	30,76	15,38	38,46	7,69	

Tabela 3: Percentuais de tipo de resposta por tipo de problema e por ordem de grandeza no pós-teste.

		Em Branco	Apenas resposta incorreta	Resposta incorreta sem relação correta	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia não sistemática	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia sistemática	Apenas resposta correta	Resposta correta (explicitando estratégia)
Problemas	PC	NP	7,69	7,69		15,38		69,23
		NG		15,38		15,38		69,23
	Ar	NP		15,38		7,69	30,76	46,15
		NG			30,76	7,69	53,84	7,69
	Comb	NP		7,69	15,38		30,76	46,15
		NG	7,69		38,46	30,76	15,38	7,69
	Perm	NP		7,69	15,38	15,38	15,38	46,15
		NG		7,69	7,69	69,23	15,38	

5 PC= Produto Cartesiano; Perm. = Permutação; Ar = Arranjo; Comb. = Combinação.

6 NG = números grandes; NP= números pequenos.

A seguir, apresenta-se uma análise mais detalhada dos tipos de respostas encontrados no pré-teste, bem como a exemplificação através das respostas apresentadas pelos alunos e a comparação com o pós-teste, de modo a verificar os avanços no que se refere à resolução de problemas combinatórios.

É possível perceber no pré-teste maior concentração das respostas nas categorias “Apenas resposta incorreta” e “Resposta incorreta sem o estabelecimento de relação correta”. O que diferencia tais categorias é que na primeira o aluno não explicita a estratégia utilizada para chegar à resposta por ele apresentada, o que impossibilita o entendimento acerca da relação estabelecida para resolver o problema proposto. Já na categoria “Resposta

incorreta sem relação correta”, a explicitação da estratégia usada pelo aluno permite a percepção acerca do estabelecimento, ou não, de relação com o problema proposto.

Abaixo, apresenta-se, na Figura 1, uma resposta que se enquadra na categoria “Apenas resposta incorreta”, uma vez que o Aluno 3, E.P.S.⁷, ao responder com “3 formas”, não explicita sua estratégia de resolução. Avanço importante percebe-se na resposta apresentada no pós-teste, por esse mesmo aluno (Aluno 3, E.P.S., Figura 2), na qual ele lista todas as possibilidades, de forma sistemática para o problema proposto. Tal resposta é classificada na categoria “Resposta correta com explicitação de estratégia”.

Figura 1: Resolução do problema de arranjo com número menor de possibilidades pelo Aluno 3, E.P.S., no pré-teste.

2. Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação? 3 formas

Figura 2: Resolução do problema de arranjo com número menor de possibilidades pelo Aluno 3, E.P.S., no pós-teste.

4) Mauricio, Tânia e André formam a comissão de eventos da escola. Eles precisam escolher entre eles um presidente e um vice. De quantas formas diferentes poderemos ter essa escolha?

Maurício e Tânia
Maurício e André
André e Maurício
André e Tânia
Tânia e Maurício
Tânia e André

No que se refere à categoria “Resposta incorreta sem o estabelecimento de relação correta”, apresenta-se, abaixo, nas Figuras 3 e 4, a comparação entre as resoluções do

Aluno 7, L.C.R.S., no problema de arranjo com número maior de possibilidades, no pré-teste e no pós-teste, respectivamente.

Figura 3: Resolução do problema de arranjo com número maior de possibilidades pelo Aluno 7, L.C.R.S., no pré-teste.

A Semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: África, Brasil, França e Alemanha. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado nessa disputa?

BOTANDO AFRICA BRASIL E FRANÇA

Figura 4: Resolução do problema de arranjo com número maior de possibilidades pelo Aluno 7, L.C.R.S., no pós-teste.

8) Em um concurso de beleza organizado pelo bairro, quatro meninas (Bruna, Roberta, Helena e Bianca) são as finalistas. De quantas maneiras distintas podemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada?

P	C	T
B	R	H
B	R	B
B	H	B
B	H	R
R	B	H
R	B	B
R	H	B
R	H	R

6 x 4 = 24 possibilidades

⁷ Por questões éticas, a identificação dos participantes se faz apenas por suas iniciais.

É possível perceber, na Figura 3, referente ao pré-teste, que o aluno, ao listar apenas uma possibilidade, fornece uma *Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta*. Entende-se que ele, ao listar apenas uma possibilidade como resposta para o problema, acreditando que ela é suficiente para solucioná-lo, não estabelece uma compreensão combinatória, tendo em vista que não percebe a existência de outras possibilidades que podem responder o que está sendo proposto.

Já na Figura 4, apresenta-se a resolução do mesmo aluno (Aluno 7, L.C.R.S.) para o problema de Arranjo, agora no pós-teste. A partir da sua estratégia, levanta-se a hipótese de que ele, atribuindo “p” à primeira colocada, “c” à segunda colocada e “t” à terceira colocada, lista todas as possibilidades nas quais “Bruna”, que ele simboliza por “BR”, pode ser a primeira colocada. Além disso, o aluno atribui “R” a Roberta, “H” a Helena e “Bi” a Bianca. Após elencar todas as possibilidades nas quais Bruna ocupa a primeira colocação, ele multiplica a quantidade de possibilidades (6) por 4, que é a quantidade de participantes do concurso de beleza, contexto no qual o problema está inserido. Assim, percebe-se que o aluno, que no pré-teste listava apenas uma possibilidade para solucionar o problema, apresenta, no pós-teste, a percepção acerca dos *invariantes* do problema proposto, a *sistematização* e a *percepção ou busca da regularidade*, sendo esses os pilares discutidos durante as intervenções.

Quanto à categoria *“Resposta incorreta ou incompleta com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática”*, pode-se perceber que, apesar de pequeno, houve um percentual de alunos que apresentou

respostas que estabeleceram relação correta com o problema proposto, apesar de não serem esgotadas as possibilidades. É importante ressaltar que este percentual, apesar de pequeno, foi maior do que o percentual encontrado na categoria *“Resposta incorreta ou incompleta com o estabelecimento de relação correta, com estratégia sistemática”*, que se diferenciava pela *sistematização*. Sem um ensino efetivo, que chame atenção para a *sistematização*, é difícil que os alunos tenham a compreensão espontânea de que sistematizar auxilia na resolução dos problemas, sendo esse um dos focos dos momentos de intervenção do presente estudo.

Abaixo, na Figura 5, pode-se visualizar a resolução do pré-teste do Aluno 5, J.R.S.R., que apresentou uma *“Resposta incorreta ou incompleta com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática”* ao resolver um problema de permutação com número menor de possibilidades. Ele lista quatro possibilidades para o problema proposto, mas não esgota as mesmas. Além disso, o aluno não sistematiza os elementos, uma vez que como primeira possibilidade escreve “irmão, mãe e pai”, como segunda “pai, irmão e mãe”, como terceira “mãe, pai e irmão”, e como quarta “pai, mãe e irmão”. Na interpretação adotada no presente estudo, para ser considerada uma resolução sistemática, o aluno teria que, ao listar a quarta possibilidade, iniciar novamente com o elemento “irmão”, de forma a melhor controlar os elementos e visualizar o que ainda faltava para concluir o problema. Ao invés disso, ela inicia a formação da possibilidade com o elemento “pai”.

Figura 5: Resolução do problema de permutação com número menor de possibilidades pelo Aluno 5, J.R.S.R., no pré-teste.

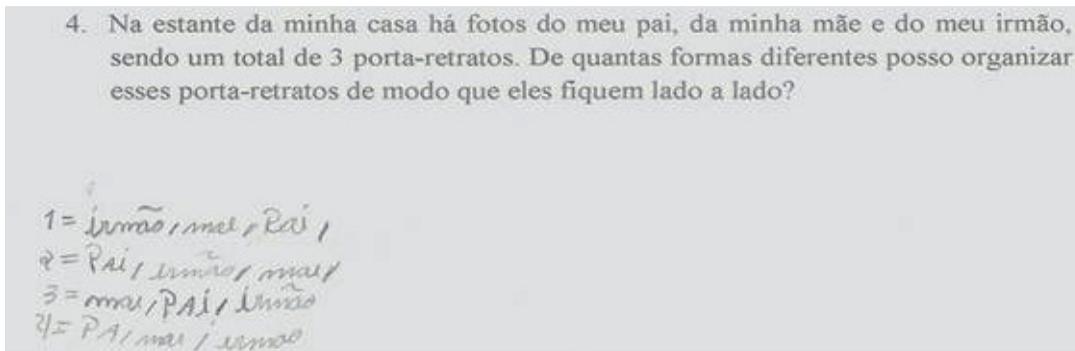
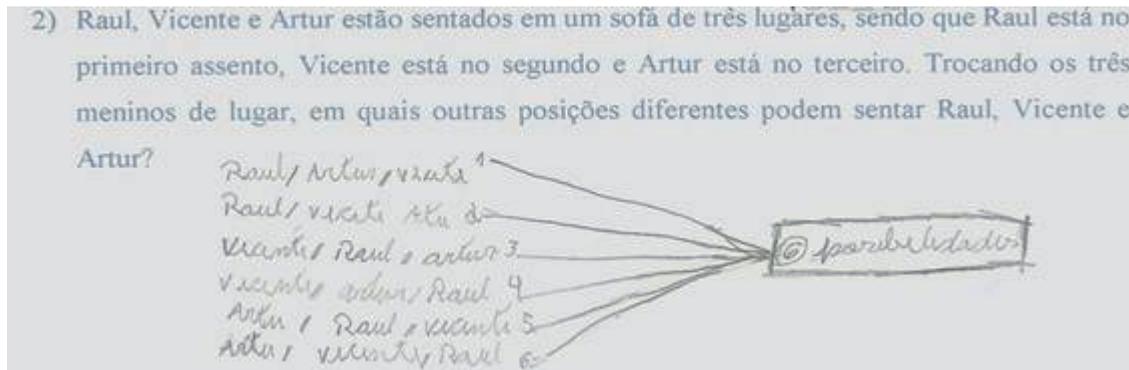


Figura 6: Resolução do problema de permutação com número menor de possibilidades pelo Aluno 5, J.R.S.R., no pós-teste.



Já no pós-teste, na Figura 6, acima, pode-se perceber a resolução do mesmo aluno (Aluno 5, J.R.S.R), para o problema de permutação proposto. Como fazia no pré-teste, ele lista os elementos, porém agora de forma sistemática e com o esgotamento das possibilidades, o que leva à defesa de que a intervenção trouxe resultados não apenas quantitativos, mas principalmente qualitativos.

No que se refere à categoria “Apenas resposta

correta”, abaixo, na Figura 7, a exemplificação a partir da resolução do Aluno 2, E.L., no problema de produto cartesiano com número menor de possibilidades. O aluno coloca como resposta “6 pares”. Tal resposta, apesar de ser a correta para o problema proposto, não fornece maiores indícios acerca das possibilidades formadas, sem que seja possível saber se de fato a compreensão estabelecida foi a correta.

Figura 7: Resolução do problema de produto cartesiano com número menor de possibilidades pelo Aluno 2, E.L., no pré-teste.

1. Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luiza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas?
6 pares

Figura 8: Resolução do problema de produto cartesiano com número menor de possibilidades pelo Aluno 2, E.L., no pós-teste.

1) Juliana é jogadora de tênis e tem quatro raquetes (vermelha, azul, preta e marrom) e duas bolinhas (amarela e verde) para jogar no torneio. Quantas combinações diferentes ela pode formar, combinando todas as raquetes com todas as bolinhas?
amarela e vermelho | amarela e azul | amarela e preto | amarela e marrom
verde e vermelho | verde e azul | verde e preto | verde e marrom

Já na Figura 8, acima, o mesmo aluno (Aluno 2, E.L.), no pós-teste, esgota as possibilidades, agora com a explicitação da estratégia, que é a *listagem de possibilidades*. Há um enriquecimento na resolução e também a percepção da *sistematização*, uma vez que ele lista os elementos de forma organizada. É possível refletir sobre a ênfase, durante as intervenções, na importância de que o procedimento de resolução fosse deixado no teste, não sendo escrita apenas a resposta. Muitas são as práticas escolares nas quais o foco é o resultado, sem que haja uma análise conjunta (professores

e alunos), acerca das estratégias de resolução, não havendo reflexões acerca de em qual(is) etapa(s) da resolução dos problemas os alunos estão tendo maior dificuldade, de modo a auxiliá-los na compreensão e conclusão correta dos problemas.

Na categoria “Resposta correta com explicitação de estratégia”, foram encontradas, no pré-teste, 15,38% de respostas, todas nos problemas de combinação com número menor de possibilidades, como é possível visualizar no exemplo a seguir, Figura 9.

Figura 9: Resolução do problema de combinação com número menor de possibilidades pelo Aluno 2, E.L., no pré-teste.

3. Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Lais, Cecilia e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas?
Lailia e Jane | Jane e Lais | Lais e Cecilia

No que se refere aos resultados encontrados no pós-teste (Tabela 3), destaca-se, em princípio, a diminuição do percentual de respostas na categoria “Apenas resposta incorreta”, se em comparação com o pré-teste (Tabela 2), e, concomitantemente, uma diminuição das respostas na categoria “Resposta incorreta sem relação correta”, o que indica que os alunos, além de começarem a explicitar suas estratégias de resolução, tendo em vista que não mais colocam

apenas a resposta, passam a utilizar estratégias válidas e a estabelecer relação correta com o problema proposto.

Além disso, de modo geral, pode-se perceber maior concentração das respostas a partir da categoria “Resposta incorreta ou incompleta com relação e com estratégia sistemática”, com exceção para os problemas de combinação e permutação com respostas que levavam a um número maior de possibilidades, tendo em vista que para esses problemas,

é possível visualizar um maior percentual de respostas nas categorias anteriores, ou seja, categorias menos elaboradas à “Resposta incorreta ou incompleta com relação e com estratégia sistemática”, o que leva à percepção de que, para esses problemas especificamente, os alunos apresentaram mais dificuldade em aproximar-se do esgotamento das possibilidades.

Pode-se observar também o aumento dos percentuais de respostas na categoria “Resposta incorreta ou incompleta com o estabelecimento de relação, com estratégia sistemática”, o que é bastante importante, tendo em vista que a sistematização foi um dos pilares adotados durante as intervenções. No pré-teste, apenas 7,69% das respostas estavam nessa categoria, todas no problema de permutação, tanto com número menor como maior de possibilidades. Já no pós-teste, em todos os problemas houve respostas nessa categoria, todas com percentual maior que 15%.

É possível perceber também, no pós-teste, que não há percentual de respostas na categoria “Apenas resposta correta”, o que leva à percepção de que aqueles alunos que esgotaram as possibilidades e chegaram à resposta correta, o fizeram com explicitação da estratégia. No pré-teste, apenas 15,38% das respostas classificava-se nessa categoria (Resposta correta com explicitação de estratégia), todas no problema do tipo combinação com respostas que levavam a um número menor de possibilidades. Já no pós-teste, pode-se perceber que em todos os tipos de problemas, exceto permutação com respostas que levavam a um número maior de possibilidades, há Respostas corretas com explicitação de estratégia, sendo, ainda, os maiores percentuais encontrados nos problemas que envolviam respostas com um número menor de possibilidades (NP).

É compreensível a necessidade de um trabalho mais sistemático (mais do que duas intervenções) com a combinatória para que alunos do 5º ano passem a aperfeiçoar o entendimento, passando a utilizar os procedimentos de resolução e esgotando as possibilidades também com problemas que levam a respostas com um número maior de possibilidades, sendo

esses problemas entendidos como os que exigem uma maior elaboração, tendo em vista a quantidade de possibilidades a serem esgotadas. Ainda assim, os resultados encontrados são relevantes e indicam que os pilares que foram trabalhados nas intervenções são um caminho válido para o ensino de combinatória e foram assimilados pelos alunos pesquisados, que passaram, de modo geral, a utilizar estratégias válidas de resolução para solucionar os problemas combinatórios.

No que se refere às estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, seguem as Tabelas 4 e 5, que sistematizam, por tipo de problema e por grandeza numérica, as estratégias apresentadas pelos alunos no pré-teste e pós-teste, respectivamente. Ao analisar a grandeza numérica, têm-se o intuito de verificar as possíveis influências causadas, a depender do número menor ou maior de possibilidades das respostas, nas estratégias apresentadas, ou seja, quando subdivide-se a análise entre números com grandeza numérica menor e maior, pode-se observar quais estratégias são utilizadas de acordo com o número de possibilidades a serem listadas. Por exemplo, é perceptível que a *generalização* (busca da regularidade) apenas foi utilizada nos problemas que levavam a respostas com um número maior de possibilidades, porque a quantidade de elementos exigiu do aluno essa estratégia de resolução.

Tabela 4: Percentual de tipo de estratégia apresentada pelos alunos no pré-teste.

		Não explicitou estratégia	Desenho	Listagem
Problemas	PC	NP	76,92	15,38
		NG	69,23	30,76
	Ar	NP	69,23	30,76
		NG	38,46	61,53
	Comb	NP	53,84	46,15
		NG	76,92	23,07
	Perm	NP	53,84	15,38
		NG	38,46	61,53

Tabela 5: Percentual de tipo de estratégia apresentada pelos alunos no pós-teste.

		Não explicitou estratégia	Quadro / Diagrama	Listagem	Multiplicação inadequada	Multiplicação adequada	Percepção ou busca de regularidade
Problemas	PC	NP		92,30			
		NG	15,38		61,53	7,69	15,38
	Ar	NP	15,38	7,69	76,92		
		NG			84,61	7,69	7,69
	Comb	NP	7,69		84,61	7,69	
		NG	7,69		76,92	7,69	7,69
	Perm	NP	7,69		92,30		
		NG	7,69		92,30		

A partir da comparação entre as Tabelas 4 e 5, acima, que sistematizam as estratégias apresentadas pelos alunos, no

pré-teste e no pós-teste, pode-se perceber que anteriormente às intervenções, eles, em sua maioria, não explicitavam a

estratégia utilizada para resolver o problema proposto. Tal dado, como citado anteriormente, pode estar ligado à realidade de muitas práticas escolares nas quais o professor foca na resposta, sem analisar os procedimentos de resolução dos alunos. Assim, os alunos passam, também, a considerar como importante apenas o algoritmo que representa a resposta.

Nesse contexto, nas intervenções foi possível perceber que parte dos alunos, durante a resolução individual dos problemas, fazia seus procedimentos de resolução em folhas à parte, ou mesmo no teste entregue, e depois apagava, colocando no local apenas a resposta. Quando a situação era percebida, havia intervenção e explicação de que os procedimentos de resolução eram tão importantes quanto a resposta propriamente dita, além de ser solicitado que os alunos não apagassem os mesmos. Acredita-se que tal intervenção tenha influenciado a percepção dos alunos no que se refere à importância da explicitação das estratégias de resolução, fazendo com que eles, no pós-teste, passassem a, além de utilizá-las com mais frequência, deixá-las no papel ao invés de apagar.

No que se refere às estratégias explicitadas no pré-teste, é possível perceber um percentual de respostas estabelecidas através de um *Desenho* (7,69% no problema de produto cartesiano com número menor de possibilidades e 15,38% no problema de combinação também com número menor de possibilidades) e um maior percentual de respostas solucionadas através da *listagem das possibilidades*, havendo a utilização de tal estratégia durante a resolução de todos os tipos de problemas combinatórios, ainda que no pré-teste.

Tal resultado ratifica a escolha inicial de adotar, durante as intervenções, a resolução dos problemas através da *listagem de possibilidades*, tendo em vista que em estudos anteriores esse era o procedimento mais utilizado pelos alunos, o que se acredita tornaria o entendimento mais fácil, uma vez que a estratégia utilizada já fazia parte do universo dos alunos.

É importante ressaltar que no pós-teste surgiram outras estratégias, tais como “*Quadro/Diagrama*”, “*Multiplicação inadequada*”, “*Multiplicação adequada*” e “*Percepção ou busca de regularidade*”, o que demonstra que os alunos, além de utilizar a estratégia trabalhada durante as intervenções, começaram a fazer uso de outras estratégias para resolver os problemas, inclusive com percepção de regularidades. Essa diversificação de estratégias diferentes da que foi utilizada durante as intervenções demonstra que os alunos passaram a compreender os problemas e não simplesmente passaram a usar um método ensinado, o que é bastante positivo, pois a intenção não era a de ensiná-los a fazer uso de uma única estratégia, mas facilitar a compreensão para que eles pudessem generalizar o que aprenderam.

Com relação à *generalização* (percepção de regularidades), destaca-se que os alunos que anteriormente às intervenções não apresentaram nenhuma resposta nesta categoria, demonstraram, no pós-teste, a utilização desta estratégia em problemas tais como produto cartesiano, arranjo e combinação,

todos com um número maior de possibilidades. É importante visualizar a utilização da generalização em problemas nos quais tal procedimento se faz mais necessário, tendo em vista a quantidade maior de possibilidades a ser listada.

Desse modo, conforme discutido no decorrer de todo o estudo, analisando a quantidade de acertos totais, os avanços nos tipos de respostas e estratégias utilizadas, se comparados o pré-teste e o pós-teste dos alunos pesquisados, percebe-se que os resultados foram bastante satisfatórios. Os alunos de modo geral demonstraram em seus procedimentos de resolução que compreenderam os pilares que foram trabalhados em sala de aula, mostrando-se capazes de resolver problemas e, de certa forma, generalizar seus procedimentos. Além disso, mesmo aqueles que não chegaram ao esgotamento das possibilidades, demonstraram importantes avanços no que se refere à compreensão dos problemas combinatórios, avançando no entendimento acerca da importância da explicitação da estratégia utilizada, da compreensão dos *invariantes* e da decorrente singularidade de cada um dos *significados* da combinatória.

4 Conclusão

Os resultados acima discutidos permitem perceber que os alunos, de modo geral, demonstraram em seus procedimentos de resolução que compreenderam os pilares que foram trabalhados. Foi grande a quantidade de alunos que apresentou avanços no desempenho no que se refere à quantidade de acertos e, principalmente, no avanço referente à qualidade dos procedimentos de resolução utilizados por elas após as intervenções.

Além disso, destaca-se que mesmo aqueles alunos que não esgotaram todas as possibilidades em suas resoluções, não apresentando as respostas totalmente corretas quando se analisa em termos quantitativos, avançaram em termos da melhora na qualidade das estratégias, por exemplo, da *listagem* de uma possibilidade apenas para a percepção de outras possíveis para responder ao problema, ainda que sem a finalização correta, o que demonstra que passaram a compreender de forma mais adequada a Combinatória.

Estudos como o atual são importantes porque destacam a necessidade de que um ensino sistemático com a combinatória seja inserido nos anos iniciais, sendo os alunos de tais anos escolares capazes de, além de criar estratégias próprias de resolução, compreender os *invariantes* de problemas combinatórios, *sistematizar* seus procedimentos e, em parte, *generalizar* os mesmos.

Tais resultados ratificam a hipótese inicial de que é preciso um trabalho sistemático, com ênfase nos *invariantes*, estando aqui inclusas as diferenças e semelhanças entre cada um dos problemas combinatórios, nas possíveis estratégias que podem vir a facilitar as resoluções e na *generalização* para que os alunos obtenham maior compreensão acerca da combinatória.

Referências

- AZEVEDO, J.; COSTA, D.; BORBA, R. O impacto do software Árvol no raciocínio combinatório. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.13., Recife, 2011. *Anais...* Recife, 2011.
- BARRETO, F.; BORBA, R. Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.13., Recife, 2011. *Anais...* Recife, 2011.
- BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 1997.
- INHELDER, B.; PIAGET, J. De la logique de l'enfant à la logique se l'adolescent. Paris: Universitaires de France, 1955.
- MIGUEL, M.I.; MAGINA, S. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2., Santos, 2003. *Anais...* Santos, 2003.
- PESSOA, C.; BORBA, R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório dos anos iniciais aos finais da escolarização básica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - IV SIPEM, 4., Taguatinga, 2009. *Anais...* Taguatinga, 2009a. p. 1-21.
- PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. Zetetiké, Campinas, v.17, n.31. 2009. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike1/article/view/2622/2364>. Acesso em: 05 maio 2012.
- PESSOA, C.; SANTOS, L.T.B. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., Recife, 2011. *Anais...* Recife, 2011.
- SCHLIEMANN, A. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, T.N.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez, 1988.
- SOARES, M. T.; MORO, M.L. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 3., Águas de Lindóia, 2006. *Anais...* Águas de Lindóia, 2006.