

# Engenharia Didática para a Teoria do Resíduo: Análises Preliminares, Análise a Priori e Descrição de Situações-Problema

## Didactic Engineering for Residue Theory: Preliminary Analyzes, Prior Analysis, and Situation-Problem Description

Francisco Regis Vieira Alves<sup>\*a</sup>; Marlene Alves Dias<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Instituto Federal de Educação Tecnológica do Ceará, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Matemática. CE, Brasil.

<sup>b</sup>Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação Matemática. SP, Brasil.

\*E-mail: [fregis@ifce.edu.br](mailto:fregis@ifce.edu.br)

Recebido em: 28/05/18; Aceito em 22/10/18

---

### Resumo

O presente escrito aborda elementos de ordem teórico-conceitual, característicos de um *design* de investigação em Didática da Matemática, com o escopo de assinalar uma discussão e a possibilidade do ganho de conhecimentos didático-metodológicos acerca da Teoria do Resíduo. Dessa forma, tendo em vista extensa literatura, com influência da vertente de pesquisa francesa, descrevem-se com maior ênfase, as etapas de análise preliminar, análise *a priori* de uma Engenharia Didática - ED, com atenção especial dedicada à concepção e a modelização de duas situações-problema. Por intermédio de uma perspectiva afetada pela Teoria das Situações Didáticas – TSD, o trabalho aborda quatro etapas dialéticas, relativas ao planejamento teórico de uma experimentação, que promovem um debate científico envolvendo professor, alunos e um saber matemático específico, significado e mobilizado por intermédio da visualização (com o uso da tecnologia), e do entendimento tácito preliminar de determinadas propriedades fundamentais na Teoria dos Resíduos. Outrossim, o trabalho acentua o caráter epistemologicamente intrincado da referida teoria matemática, fato que justifica um olhar pormenorizado e cientificizado, proporcionado por uma proposta de ED.

**Palavras-chave:** Engenharia Didática. Teoria do Resíduo. Análises Preliminares.

### Abstract

*This writing deals with conceptual and theoretical order elements, characteristic of a particular design of research in the Didactics of Mathematics, varying between offering a discussion and the possibility of a gain of didactical and methodological knowledge of the Residue Theory. Thus, aiming at extensive literature, with the French research, the preliminary stages nominated preliminary and a priori analysis of a Didactical Engineering – DE are described with a greater emphasis, with especial attention dedicated to the design and modeling of two didactic situations. Thus through a perspective affected by the Theory of Didactic Situations – TDS, the present work addresses four dialectical steps, regarding the theoretical planning related to experimentation, with the goal to promote a scientific debate involving the teacher, students and a specific mathematical knowledge, signified and mobilized through the visualization (with the using of technology) and a tacit understanding of certain fundamental properties in the Residue Theory. Furthermore, the work emphasizes the mathematical character of an epistemological complex theory, which justifies a careful and scientific look provided by the present ED proposal.*

**Keywords:** Didactic Engineering. Theory of Residue. Preliminary Analysis.

---

## 1 Introdução

Há décadas depara-se no *locus* acadêmico uma profusão de trabalhos que assinalam os entraves que os alunos enfrentam em um contexto de transição da Escola para o universo acadêmico. Nessa frente de investigação, desde a década de 1980, aprecia-se o relato de especialistas ratificando a relevância de uma vigilância constante, que recai sobre o processo de transição envolvendo esses dois *locus*. Por outro lado, quando se restringe o olhar aos estudos compulsórios proporcionados pela academia e, de modo específico, de conhecimentos científicos matemáticos, sem se ater a uma análise pormenorizada, pode-se depreender que os entraves e obstáculos continuam e, em certos casos, são agravados e radicalizados, tendo em vista as mudanças impostas pelo ritual científico indefectível da pesquisa em Matemática que afeta, de modo inexorável, a atividade de ensino e relações entre estudantes – professor.

Isso posto, manifesta-se o interesse por um tópico específico no âmbito da Análise Complexa (AC), que promove o contato dos alunos com uma profusão de propriedades revisitadas no interior da teoria das funções na variável complexa. Por outro lado, tendo em vista a opção por uma perspectiva sistemática de preparação, de concepção, de planejamento, de modelização e, possivelmente, a execução e/ou replicação de sequências estruturadas de ensino, indicam-se os elementos de uma Engenharia Didática Clássica (ED), com ênfase maior em suas duas etapas iniciais, nominadas por análises preliminares e análise *a priori*. Ademais, nestas análises, no que concerne às etapas da mediação pretendida, assumem-se os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), tendo em vista a descrição dos elementos de uma eventual situação didático-metodológica, que envolve o processo da obtenção de determinadas integrais na variável complexa, com origem no emprego de um importante teorema nominado por Teorema do Resíduo, e que representa em certa

medida, a evolução e a generalização do modelo específico do Cálculo na variável complexa ou Análise Complexa (AC).

Desse modo, na próxima seção são assinalados os aspectos essenciais da (ED) e da (TSD), que devem autorizar o desenvolvimento e a descrição de determinados momentos dialéticos para o ensino desse tema no contexto acadêmico.

## 2 Desenvolvimento

Com origem no pensamento expresso na seção anterior, busca-se delimitar uma perspectiva sistemática de um método, visando objetivar um viés de cientificidade e eliminação ou, pelo menos, de redução de elementos subjetivos e que concorrem para proporcionar ao leitor uma compreensão sistemática da presente proposta que, em maior ou em menor essência, permite impactar as relações derivadas do trinômio clássico professor – estudante – saber matemático. Dessa forma, se mostra necessário a identificação dos pressupostos teóricos, que permitem uma perspectiva de complementaridade teórica entre a (ED) e a (TSD), assumindo uma tradição que se consolidou neste país, após décadas de repercussão da corrente francesa da Didática da Matemática (*Didactique des Mathématiques*).

### 2.1 Metodologia

Como indicado na seção precedente, no presente trabalho, adota-se uma perspectiva teórica em caráter de complementaridade visando o uso da (TSD) e da (ED). Assim, diante das fases clássicas de (ED) indicadas por: análise preliminar, análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação da pesquisa. Outrossim, tendo em vista os pressupostos visando a mediação do saber matemático, objetivam-se as fases dialéticas de ação, de formulação, de validação e de institucionalização, previstas por Brousseau (1986). O objeto matemático adotado se constitui no interior da teoria das funções da variável complexa e, na seção seguinte são indicados alguns elementos importantes para a sua discussão e reprodução no ensino acadêmico, objetivando uma transposição didática (CHEVALLARD, 1991) sobre o teorema do Resíduo.

### 2.2 Discussão

Nas seções vindouras são indicados alguns elementos da (ED) e da (TSD) empregados visando exploração e mediação sistemática para o ensino do teorema do Resíduo. O entorno histórico, matemático e epistemológico do referido teorema será indicado na fase de análise preliminar. Em seguida, ainda nas análises preliminares, é abordada a descrição de situações didáticas, com o auxílio do *software GeoGebra*, com ênfase declarada pela visualização e percepção visual de propriedades e de elementos importantes para o desenvolvimento da heurística resolutive em cada situação didática. Dessa forma, declara-se que, nas seções vindouras, certos elementos se enquadram no processo de Transição Complexa do Cálculo

(TCC) que, de modo prosaico, envolve a transição dos estudos acadêmicos, desde o primeiro contato dos estudantes com a teoria das funções em uma variável real, passando pela teoria das funções em várias variáveis, até findar o estudo na variável complexa.

### 2.2.1 Sobre a Engenharia Didática (ED) e a Teoria das Situações Didáticas (TSD)

O *design* de investigação que permite, dentre outros aspectos, a obtenção de dados científicos visando o aperfeiçoamento do ensino e da aprendizagem de determinado conteúdo ou objeto matemático, adquiriu destaque em meados dos anos de 1980 e com um distinguido período de efervescência entre as décadas de 1980 e 1990. Segundo Almouloud; Silva (2012, p.26) explicam que:

[...] a noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) emergiu na didática da matemática no início dos anos 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica.

Com o intento de uma correta compreensão e demarcação do campo epistêmico de interesse, cabe o entendimento de que determinada metodologia de pesquisa, empregada no Brasil e também no Exterior (ARTIGUE, 2009; 2012, 2013; ARSLAN, 2005; BRUM; SCHUHMACHER, 2013; BRIDOUX, 2012; GHEDAMSI, 2009; WINSLOW, 2003) em vários trabalhos, nos variados níveis de ensino, adquiriu o *status* de teoria no âmbito da Didática da Matemática, pertencente à corrente francesa, que representou a mobilização de uma plêiade de estudiosos interessados no aperfeiçoamento dos conhecimentos didáticos sobre o saber matemático, culminando com “trabalhos cumulativos na área” (MARGOLINAS, 1999, p. 10).

Nesse sentido, cabe observar que “a didática não consiste em fornecer um modelo para o ensino, mas produzir um campo de conhecimentos e de questões que permitem colocar em prova qualquer situação de ensino e que permita corrigi-la e melhorá-la [...]” (BROUSSEAU, 1988, p. 16). Com arrimo nas reflexões de Brousseau, constatam-se alguns dos interesses da Didática da Matemática. Por outro lado, se vê que, em seu estágio embrionário, a mobilização científica de estudiosos começou ainda nos anos 1960, “diante de uma crise social muito forte em torno da Matemática” (DOUADY, 1995, p.3), ainda com forte influência do estilo Bourbaki.

Pode-se depreender que a Didática da Matemática (DM) possui um terreno epistêmico intimamente condicionado pelo saber matemático. E, por intermédio de um movimento dialético, característico de sua evolução e sistematização, divisa-se um *corpus* teórico que parte da Matemática, adquire uma robustez científica e tem capacidade de voltar a se aderir, mais uma vez, à Matemática e, todavia, “não garante

uma perspectiva similar aplicacionista em outros campos de saberes científicos” (MARGOLINAS, 2004, p. 4). Com efeito, “a Didática da Matemática se insere num quadro das ciências cognitivas como as ciências de condições específicas na difusão dos conhecimentos matemáticos utilizados no funcionamento das instituições humanas” (BROUSSEAU, 1994, p.53).

Pode-se vislumbrar a relevância dessa perspectiva *sui generis* de análise e investigação dos problemas envolvendo o binômio ensino-aprendizagem, quando se observa Brousseau (1989, p. 14) ao mencionar que: “o matemático não comunica seus resultados sob a forma que ele os encontra; ele os organiza, ele os fornece uma forma mais geral possível, ele desenvolve uma ‘didática prática’ que consiste em colocar o saber sobre forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada e destemporalizada”. Entretanto, no âmbito do ensino, depara-se com um caráter antagonista (MARGOLINAS, 1995, p. 343) ao fato indicado no excerto anterior. Com efeito, na frente do ensino, registra-se um trabalho no sentido inverso, posto que o professor deverá recontextualizar e repersonalizar o saber científico, isto é, realizar uma transposição didática (CHEVALLARD, 1991).

Artigue (1990) coloca também em destaque as preocupações epistemológicas conduzidas e apreciadas por vários especialistas, que culminaram por influenciar uma sistemática de investigação, tendo como foco a experimentação de mediações didáticas planejadas e sistematicamente estruturadas.

Dessa forma, sob um apelo metafórico que acentua o planejamento de um engenheiro, que busca planejar, descrever, sistematizar e antever possíveis contratempos em um projeto de engenharia, registra-se a evolução da Engenharia Didática (ED) (ARTIGUE, 2009; 2012. DOUADY, 1995) como perspectiva que permite a descrição de um percurso e atuação bem mais globalizante, tendo em vista que o olhar fundamental da (TSD) se mostra direcionado aos fenômenos diretamente ou indiretamente extraídos da sala de aula, das relações entre sujeitos, professor e saber ou, melhor dizendo, sobre um “conjunto de situações de ensino primário” (BLOCH, 2006, p.17). Douady (2008, p.2) proporciona um esclarecimento das características mais abrangentes da ED, quando acentua que “a Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula, isto é, a construção, realização, observação e análise de sessões de ensino”.

Isso posto se tems capacidade de determinar o papel da ED, como aporte metodológico de investigação e a TSD como teoria fundante na estruturação, na concepção e planejamento de uma mediação didática intencional. Laborde (1997, p.99), por exemplo, acentua que: “as duas primeiras teorias desenvolvidas na França em Didática da Matemática giraram em torno do binômio situação-sujeito”. A autora assinala que seus fundamentos foram declarados nos trabalhos de Vegnaud

(1981; 1990) e Brousseau (1986).

E, do ponto de vista da constituição de uma área científica de investigação, envolvendo as teorias anteriores, bem como outras vertentes de atuação, Laborde (1997, p.104) indica três grandes categorias de interesse no âmbito dos estudos produzidos na área, sobretudo, no final dos anos 1980 para o início dos anos 1990, a saber: a dimensão epistemológica, a dimensão cognitiva e, finalmente, a dimensão didática.

A primeira dimensão adquire proeminência natural, tendo em vista que, a vigilância do professor-pesquisador no que concerne aos conteúdos matemáticos de uma sequência de ensino e de que modo poderá atuar/modificar/aperfeiçoar sua transmissão. Os pressupostos de uma (ED) se mostram intimamente vinculados com um quadro de referências metodológicas e possibilitam o planejamento, a predição/descrição, replicação e a modelização teórica de fenômenos didáticos-metodológicos (ARTIGUE, 1984, p.6) visando a experimentação.

Nesse sentido, Artigue (1996, p.265) comenta que:

A Engenharia Didática coloca problemas de natureza nova, pois, de um lado, a realização experimental supõe, ela mesma, uma espécie de transmissão em direção aos aprendizes, que devem ser os atores e, por outro lado, como quadro de metodologias externas, não podemos importar facilmente o ‘sentido’ de reprodução de outros campos científicos específicos.

As ponderações de Artigue se mostram alvissareiras, posto que apontam um campo epistêmico específico em foco, intimamente relacionado e condicionado por um conhecimento matemático particular, objeto de interesse para um determinado projeto de engenharia. Por outro lado, tendo em vista as relações em torno do conhecimento matemático se constata que “ao decurso das mudanças entre professor e alunos, o projeto evolui, ao sabor da reação dos estudantes e em função das escolhas do professor” (DOUADY, 2008, p.2).

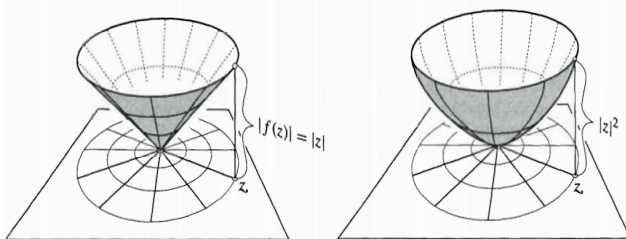
Dessa forma, uma investigação afetada pelos pressupostos da ED pode ser concebida como um “produto”, pois é “o resultado de uma análise *a priori*” e um “processo”, como consequência de “uma adaptação pela colocação em uso do produto relativamente às condições dinâmicas da classe” (DOUADY, 2008, p.2). Como mencionado há pouco, a etapa de análise *a priori* constitui uma das etapas sistemáticas da ED. E, de modo prosaico, na literatura científica se identificam todas as suas etapas: análises preliminares; análise *a priori*; concepção e estruturação das situações, experimentação; análise *a posteriori* e validação. Laborde (1997, p.103) imprime ainda outra interpretação das mesmas, na medida em que discute as etapas de concepção, de realização, de observação e de análise de uma sequência de ensino.

### 2.2.2 Transição Complexa do Cálculo (TCC): o caso da Teoria do Resíduo

Na presente seção assinala-se a dimensão epistemológica de interesse, como assim prevê Laborde (1997). Deste

modo, são expostos alguns trabalhos (ALVES, 2015; 2014a; 2014b; 2014c; CONWAY, 1978; DANENHOWER, 2000; HARDING; ENGELBRECHT, 2009; TIROSH; ALMOG, 1989; TOMASIUNAS, 2012; WEGERT, 2012), que asseveram que as exigências impostas aos estudantes, tendo em vista a mudança da variável real para a variável complexa, isto é, a transição indicada por  $x = x + i0 \Rightarrow z = x + iy$  proporciona uma série de mudanças, novas demandas de habilidades, exige a readaptação de antigas concepções, características intrínsecas do trato com os objetos conceituais característicos do Cálculo, tanto em uma variável real ou Análise Real (WINSLOW, 2006), bem como os objetos do Cálculo em Várias Variáveis – CVV (ALVES, 2011; ALVES; BORGES NETO; ALVES DIAS, 2012; ALVES; BORGES NETO, 2011). Por outro lado, o percurso de mudança notacional determina, também, uma mudança dimensional e topológica. Com efeito, no caso do CUV, lida-se com o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  e, logo após, os estudantes mantêm contato com funções do tipo  $z = f(x, y)$  ou  $w = f(x, y, z)$ , que possuem seus gráficos, respectivamente, nos espaços  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$ . No entanto, nas etapas acadêmicas subsequentes, os estudantes lidam com funções do tipo  $f(z) = u(z) + i \cdot v(z)$ . O problema, nesse último caso, reside no fato de que o gráfico de uma função na variável complexa será descrito no espaço  $\mathbb{R}^4$  e que se mostra imperceptível aos órgãos sensoriais, a menos que sejam explorados os recursos computacionais, como assim recomenda Needham (2000) (Figura 1).

**Figura 1** - Needham comenta o uso de computadores com o escopo de expandir o entendimento acerca de determinadas propriedades



Fonte: Needham (2000)

Ora, o problema anterior constitui apenas a “ponta do iceberg” no contexto da Transição Complexa do Cálculo – TCC, uma vez que outros entraves são relatados em vários escritos acadêmicos (BRADEN, 1985; DANENHOWER, 2000; GLUCHOFF, 1993; HANSON; SHA, 1998; HARDING; ENGELBRECHT, 2009; PEREZ, 2012; SANTOS, 1998; WEGERT; SEMMLER, 2011).

De modo específico, o assunto matemático, relativamente ao qual se apresenta a presente proposta de ED se refere ao Teorema dos Resíduos que, na verdade, representa “uma generalização do teorema de Cauchy” (FERNANDEZ; BERNARDES JUNIOR, 2008, p.164). Nesse sentido, autores comentam que o teorema de Cauchy diz respeito à ideia de que “uma integral de uma função analítica  $f$  definida em um aberto  $A$  sobre um ciclo suave por partes  $\sigma$  homólogo a zero

em  $A$  é sempre nula” (ibid, 2008, p. 165). O diferencial, ou melhor dizendo, a generalização da ideia anterior reside no fato de que podem existir pontos isolados no conjunto aberto  $A$ , nos quais a função não é analítica ou possui polos (LINS NETO, 1996).

Formalmente, os compêndios especializados costumam escrever  $\int f(z)dz = \sum n(\sigma, z) \cdot \text{Res}(f, z)$  (\*), em que o símbolo ao lado direito envolve a soma feita sobre todas as singularidades isoladas de  $f$  e o número  $\text{Res}(f, z)$  é o resíduo de  $f$  em  $z$  (FERNANDEZ; BERNARDES JUNIOR, 2008, p. 165). A vantagem conceitual do emprego da última formulação é explicado por Shokranian (2011, p.255), ao mencionar:

O Teorema do Resíduo é um meio de relacionar a expansão de Laurent de uma função meromórfica com a sua integral sobre o contorno envolvendo a singularidade isolada. É claro que se pode calcular o resíduo de uma função num ponto de singularidade isolada utilizando a expansão de Laurent, mas isso nem sempre é um caminho prático para esse cálculo.

Ora, a elegante retórica do excerto anterior devido a Shokranian pode parecer evidente para o *expert*, entretanto, não se pode esperar uma mesma compreensão imediata por parte do aprendiz, relativamente às simbologias cifradas que foram indicadas há pouco em (\*). Para concluir a presente seção, assinala-se a advertência de Fiske (1906, p. 34), ao estabelecer a definição da integral de uma função  $f$  ao longo de um caminho  $L$ , que se faz presente na integral indicada em (\*). Ele comenta que:

O limite, cuja existência do limite foi demonstrada, é chamada de integral de  $f(z)$  ao longo do caminho  $L$  e será escrita por  $\int f(z)dz$ . A definição aqui fornece um significado semelhante ao caso da integral de uma função na variável real. Nela, é desnecessário especificar o caminho de integração quando a variável independente é restrita aos valores reais, desde que, nesse caso, lidamos com uma porção do eixo real incluído nos limites do intervalo de integração.

Com origem nas advertências de Fisk, identifica-se o seguinte processo de transição, simbolicamente indicado por  $\int_a^b f(x)dx \xrightarrow{\text{transição}} \int f(z)dz$  que pode proporcionar obstáculos ao entendimento (NEEDHAM, 2000). Assim, a partir da apreciação das considerações abordadas nos parágrafos anteriores, depara-se com uma problemática global ou local, que pode incidir negativamente nas relações estabelecidas entre ensino e aprendizagem. Dessa forma, relata-se o seguinte questionamento:

- (i) De que modo a exploração da tecnologia pode evitar ou, pelo menos, suavizar/evitar um trato eminentemente analítico e formal em (AC)?
- (ii) Que elementos precisam ser identificados em uma situação-problema de modo que se possa proporcionar aos estudantes elementos facilitadores do entendimento no contexto da Transição Complexa do Cálculo (TCC)?

Não se considerará aqui os efeitos institucionais da passagem do ensino escolar para o acadêmico que, segundo Artigue (2003), Bloch (2006) e Tall (1991) são



demasiadamente brutais. Doravante, cabe assinalar que os valores, objetivos e hipóteses de trabalho a serem declarados permanecem condicionados a partir dos questionamentos anteriores, os quais são perquiridos responder, pelo menos parcialmente, tendo em vista que não se apresentarão dados empíricos no presente trabalho. Sem mais delongas, indica-se o seguinte objetivo: descrever situações didáticas estruturadas com o tema Teoria do Resíduo, assumindo os momentos dialéticos de ação, de formulação, de validação, de institucionalização (segundo a TSD) e sua descrição nas fases iniciais (análise preliminar e análise *a priori*) de uma ED de 1ª geração (ALMOULOU, SILVA, 2012).

A relevância do objetivo anterior se justifica, também, diante da escassez de trabalhos devotados aos temas para o ensino de (AC). Logo em seguida se apresenta a primeira etapa desta (ED).

### 2.2.3 Análises preliminares

De modo sistemático, conforme Artigue (1995a, p. 249-250), nesta etapa se considera: uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino (indicado na seção anterior); análise dos entraves no campo de ensino em que se pretende realizar uma ação didática; exame das concepções e conhecimentos prévios dos alunos e, por fim, análise do ensino atual (inspeção dos compêndios especializados) e seus efeitos. Por fim, todos os elementos anteriores levam em consideração os objetivos desta investigação que são indicados na seção precedente.

Almouloud (2007) aponta, de modo mais pragmático, as seguintes etapas: (i) estudo da organização matemática; (ii) análise didática do objeto matemático. De modo específico, concernente ao item (i), se pode ater: estudo da gênese histórica envolvendo certas noções em (AC); sua funcionalidade atual na Matemática (limitações para o uso didático e metodológico); obstáculos relativos aos conceitos no âmbito da (TCC) (conceitos reconhecidamente complexos vinculados a Teoria dos Resíduos); a estrutura atual do ensino de (AC) e seus efeitos. Relativo ao item (ii) se aponta a relevância da análise de livros didáticos. Uma análise de livros de Análise Complexa deve contemplar: o papel da história da (AC); os obstáculos epistemológicos e metodológicos identificáveis na abordagem dos autores (NEEDHAM, 2000); antever as possíveis concepções dos alunos (dimensão cognitiva) oriundas a partir da abordagem proposta.

Não se desenvolverá um expediente aprofundado de inspeção de livros específicos (CECÍLIA; BERNARDEZ, 2008; CONWAY, 1978; FLANIGAN, 1972; GONG, 2001; KRANTZ, 1990; POLYA; LATTI, 1974; RUDIN, 1986; WEGERT, 2012), que abordam o assunto de interesse. Todavia, acentuam-se os pressupostos da obra intitulada *Visual Complex Analysis*, que explora os aspectos gráfico-geométricos envolvidos para o ensino de AC (NEEDHAM, 2000) e que se acredita permitir uma mobilização adequada

das concepções dos aprendizes (ARTIGUE, 1990).

Para concluir, recorda-se que Almouloud (2007) menciona que os dados coligidos a partir das duas etapas de análises (i) e (ii) anteriores auxiliam na definição das questões de pesquisa e da formulação das hipóteses. Assim, diante dos questionamentos anteriores e do objetivo são elencadas as seguintes hipóteses de trabalho: (a) a visualização pode proporcionar alternativas para a abordagem e o ensino de certos assuntos em (AC) e evitar um trato eminentemente analítico e bastante procedural dos conceitos relacionados com o processo de integração; (b) a tecnologia proporciona o entendimento das relações envolvendo a transição do Cálculo da Variável Real para a Variável Complexa, com o amparo na visualização e mobilização tácita de saberes.

### 2.2.4 Análises *a priori*

De modo *standard*, e como já mencionado nas seções anteriores, o componente do estudo epistemológico desempenha papel visceral logo nas etapas iniciais de uma incursão investigativa com amparo na ED. Salienta-se que a ED é uma metodologia de pesquisa, sendo assim se torna indispensável o uso de teorias que servem para fundamentar a investigação e para a leitura/interpretação dos dados possivelmente produzidos pelos estudantes.

Ademais, na análise *a priori*, tem-se o interesse em determinar o controle do “comportamento dos alunos e seu sentido” (ARTIGUE, 1995). Vale recordar que Artigue (2008) descreve as mudanças atuais e a evolução da (ED). Dessa forma, a autora evidencia a contribuição e a influência de outras teorias empregadas de modo conjunto com a (ED) e, em neste caso, a (TSD), o que permitirá um *design* didático privilegiado de apreciação objetivando o ensino.

### 2.2.5 Escolha dos problemas e variáveis didáticas

Não foram escolhidas situações que autorizam uma ação bastante autônoma do estudante, como assim observa Margolinas (1995). Dessa forma, no bojo das variáveis micro-didáticas (relacionadas com a organização local da ED), leva-se em consideração apenas àquelas condicionadas por uma situação didática, em contraposição a noção de situação a-didática (BROUSSEAU, 1986). Desse modo, no rol dos elementos cognitivos esperados dos estudantes, indica-se como pré-requisitos seus conhecimentos e, naturalmente, as concepções obtidas pelo contato institucional formal com as teorias matemáticas anteriores (Cálculo em uma e em várias variáveis). No próximo segmento, o domínio de razoável sintaxe para o uso do *software GeoGebra* e do software de computação algébrica *Maple* constitui também parte de variáveis didáticas.

### 2.2.6 Concepção das situações

Assume-se posição concorde com Brousseau (1989, p.15), quando acentua que “a aprendizagem é uma

modificação do conhecimento e que o próprio aluno deve produzi-lo e que o professor deve provocar e seguir um certo raciocínio. Para fazer funcionar um conhecimento apropriado dos alunos, o professor busca uma situação apropriada”. Desse modo, tendo em vista responder às questões de investigação e validar ou refutar as hipóteses anteriores, elabora-se analisa-se e se antevem determinados entraves atinentes a um conjunto de duas situações problema e, desse modo, segue-se o itinerário preceituado por Almouloud (2007).

Almouloud (2007) auxilia ao indicar elementos que não podem se mostrar negligenciados e, assim, ao assumir uma posição concorde com Almouloud, sublinha-se: o problema envolve vários domínios de conhecimentos (álgebra, geometria e domínio numérico); os conhecimentos dos alunos relativamente ao CUV e CVV devem funcionar como pré-requisitos.

Situação-problema I: Decidir a convergência da seguinte integral imprópria ou generalizada  $\int_?^? \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$ , com  $x \in \mathbb{R}$ .

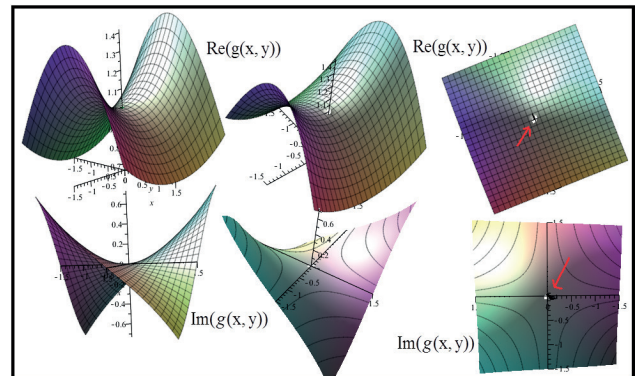
Comentários: Na presente tarefa, os alunos precisam investigar e decidir os limites da integral acima (que intencionalmente indica-se por “?”), tendo em vista a definição de integral imprópria ou generalizada, estudada no contexto do (CUV). Ademais, devem identificar os entraves, planejando como escopo a aplicação imediata de técnicas de integração usuais na variável real e, não obstante, compreender a necessidade de introdução da variável complexa.

Situação de ação. Assume-se como pressuposto de que “a constituição do sentido, tal como entendemos, implica numa interação constante dos alunos com situações problemáticas, interações dialéticas (caso o sujeito antecipe, finalize suas ações) [...]” (BROUSSEAU, 1998, p.117). Assim, de modo preliminar, os alunos manifestam uma ação em situação, na condição em que a situação problema manifeste um sentido e desperta o interesse dos mesmos.

Diferentemente das habilidades previstas no CUV e no CVV, o aluno deve escolher um caminho no plano complexo, no sentido de integrar a função  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ , descrita na variável real, relacioná-la ainda com outra função  $g(z) = \frac{\text{sen}(z)}{z} = \frac{\text{sen}(x+iy)}{x+iy} = u(z) + iv(z)$  indicada na variável complexa.

Todavia, não poderão escolher qualquer caminho no plano complexo, posto que identificam uma singularidade no ponto  $z = 0 + i0$  (no caso da reta o caminho é um intervalo que possui o ponto  $x = 0$ ), entretanto, quando se lidam com as funções  $u(x, y) + iv(x, y)$  conta-se com sua visualização na figura 2, no espaço  $\mathbb{R}^3$

Figura 2 - Visualização das partes real e imaginárias de uma função na variável complexa com o CAS Maple e identificação do ponto correspondente à singularidade



Fonte: Os autores.

Situação de formulação. Do ponto de vista do tratamento analítico dos registros, com auxílio do CAS Maple, pode-se obter que  $g(x, y) = \text{Re}(g(x, y)) + i \text{Im}(g(x, y))$ . Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os aprendizes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate, a dialética “permite criar um modelo explícito que pode ser formulado

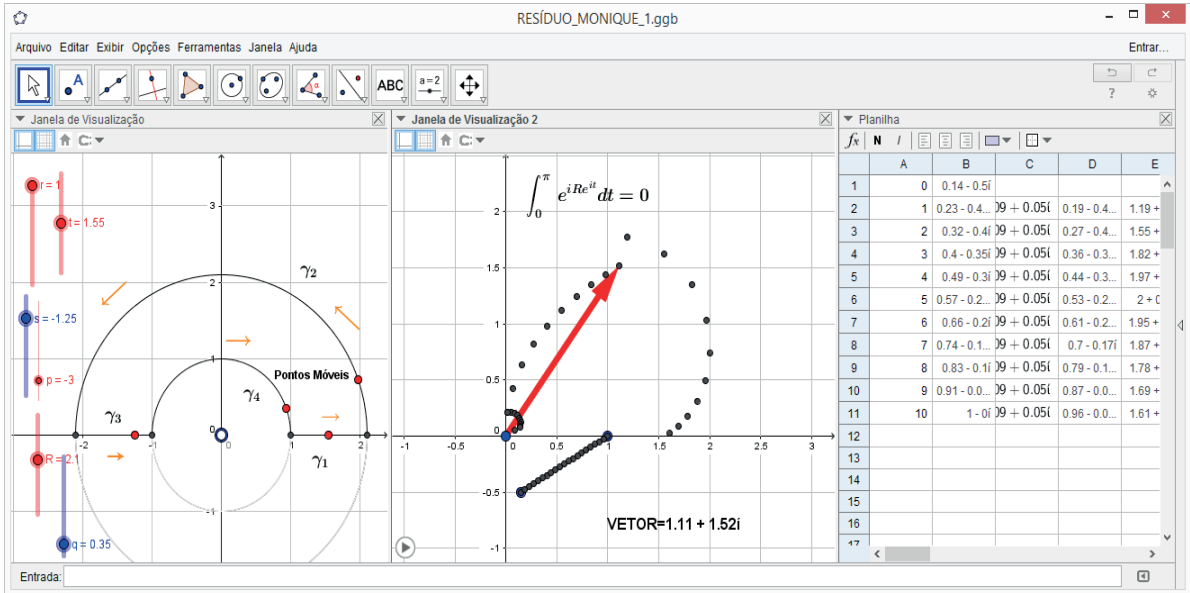
$$\text{Re}(g(x, y)) = \frac{\text{sen}(x) \cosh(y)x}{x^2 + y^2} + \frac{(\cos(x) \sinh(y)y)}{x^2 + y^2} \quad \text{e}$$

$$\text{Im}(g(x, y)) = \frac{\cos(x) \sinh(y)x}{x^2 + y^2} - \frac{\text{sen}(x) \cosh(y)y}{x^2 + y^2}$$

Aqui, de acordo com as discussões na aula passada, um elemento de transição a ser explorado diz respeito à identificação de duas descontinuidades (dois “buracos” na superfície), uma relacionada com a parte real e a outra com a parte imaginária, no ponto  $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ . Os conhecimentos mobilizados aqui dizem respeito ao (CVV) e sua interpretação metafórica estimula em um entendimento auxiliar do estudante (ALVES, 2011, p. 243).

Tendo em vista que se lida com uma singularidade removível (LINS NETO, 1996, p. 246), tal dificuldade por ser contornada. Assim, deve-se considerar, pois, a função  $f(z) = \frac{e^{iz}}{\text{sen}(z)}$ ,  $z \neq 0$ , cuja parte imaginária no eixo real é  $\frac{e^{iz}}{\text{sen}(z)}$ . Então, a função tem um polo simples na origem com resíduo igual a 1! Com efeito, sabe-se a seguinte descrição  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  (SHOKRANIAN, 2011), portanto, tem-se  $e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{z^n}{n!} = 1 + i \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2!} + i^3 \frac{z^3}{3!} + i^4 \frac{z^4}{4!} + i^5 \frac{z^5}{5!} + \dots + i^n \frac{z^n}{n!} + \dots$ , portanto, vê-se ainda que  $\frac{e^{iz}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2!} + i^3 \frac{z^2}{3!} + i^4 \frac{z^3}{4!} + \dots + i^n \frac{z^{n-1}}{n!} + \dots$ . Desse modo, por meio da inspeção da série formal de potências anterior, pode-se identificar que a fração  $\frac{1}{z-0}$  ratifica o valor do resíduo da função, isto é, escreve-se  $\text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = 1$ . Nesse caso, os conhecimentos anteriores dos estudantes devem conhecer que tal série converge, fato que pode ser verificado analiticamente e geometricamente (ALVES, 2014d). (ver figura 3).

**Figura 3** - Visualização da região de integração no plano complexo e a interpretação geométrica e valor numérico da integral representada com o *software GeoGebra* (ao lado direito).



Fonte: Os autores.

Desse modo, por intermédio do caminho orientado abaixo, no sentido anti-horário, depreende-se que  $\int_{\gamma} e^{iz} dz = 0$ , posto que o número de voltas em torno da origem vale zero. Ademais, os alunos devem compreender que  $\int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt - \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt = 0$ . Logo em seguida, tendo em vista que  $\int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt = -\int_r^R \frac{e^{-it}}{t} dt$ , portanto, substitui-se na seguinte integral  $\int_{\gamma} \frac{e^{iz} dz}{z} = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt - \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt = 0 \Leftrightarrow \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt - \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt + \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt = 0$

$$\int_r^R \frac{e^{it} - e^{-it}}{t} dt - \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt + \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt = 0 \Rightarrow 2 \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(t)}{t} dt + \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt = \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt$$

Passamos, pois, a avaliar o comportamento do seguinte módulo  $\left| \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt \right| \leq \int_0^{\pi} |e^{iRe^{it}}| dt = \int_0^{\pi} e^{-R\text{sen}(t)} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\text{sen}(t)} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2Rt}{\pi}} dt = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0$ . E, concluindo o argumento anterior, vê-se ainda que  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_r^R \frac{e^{it} - e^{-it}}{t} dt = \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(t)}{t} dt + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{e^{iz} dz}{z} \rightarrow \frac{\pi}{2}$  e, finalmente, infere-se  $\int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(x) dx}{x} = \frac{\pi}{2}$ .

Na Figura 3 são fornecidas a interpretação geométrica e o comportamento numérico de algumas integrais discutidas nessa fase. Repare ao lado direito que o vetor na cor vermelha deve indicar o valor da integral e, quando se localizam os pontos móveis sobre o eixo das abscissas, o valor numérico da integral  $\left| \int_0^{\pi} i \cdot e^{iRe^{it}} dt \right|$  tende a zero, em consonância com os dados obtidos no quadro analítico no parágrafo anterior.

Com o arrimo da figura 4 (ao lado esquerdo), algumas desigualdades empregadas podem ser interpretadas a partir do quadro gráfico-geométrico que foi exibido e envolve a relação  $\int_0^{\pi/2} e^{-R\text{sen}(t)} dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2Rt}{\pi}} dt$ . A desigualdade  $\frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}$ , para  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  pode ser compreendida e aceita pelo grupo, não obstante, na fase seguinte, o professor estimula um debate

sobre a “certeza das asserções” (ALMOULOU, 2007, p. 40).

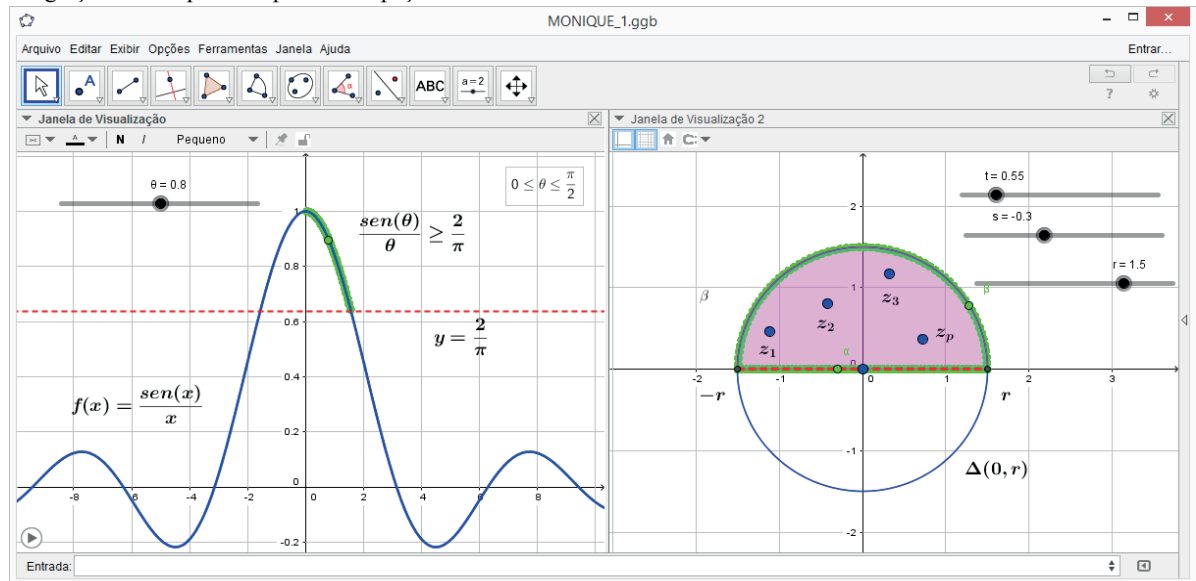
Situação de validação. Assinala-se que nas argumentações anteriores, uma série de ilações podem ser produzidas pelos estudantes, com um caráter local e provisório. Alguns dos argumentos empregados podem ser formalmente respondidos pelo professor ou, de outra forma, o debate em sala de aula pode continuar e o *expert* conduzi-los a um estágio mais elevado de compreensão das ideias envolvidas na fase anterior.

Na figura que segue, ao lado esquerdo, exibe-se uma construção com o *software GeoGebra*, que permite a visualização e a exploração, por parte do estudante, de uma propriedade necessária para um bom andamento dos conhecimentos mobilizados na presente situação didática. Nesse caso, ao considerar a função  $f(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta}$ ,  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Analiticamente, se terá  $f'(\theta) = \frac{\theta \cdot \cos(\theta) - \text{sen}(\theta)}{\theta^2} = \frac{\cos(\theta) - \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta}}{\theta}$ . Por outro lado, deseja-se mostrar que a função  $f(\theta)$  é decrescente no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  e, nele se define  $f(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1$ . No entanto, nas condições do teorema do valor médio, dado um  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , quando considera-se a função  $g: (0, \theta) \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $g(\theta) = \text{sen}(\theta)$ , existe  $\eta \in (0, \theta)$  tal que  $\frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = \frac{\text{sen}(\theta) - \text{sen}(0)}{\theta - 0} = g'(\eta) = \cos(\eta)$ .

Portanto, vê-se que  $f'(\theta) = \frac{\cos(\theta) - \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta}}{\theta} = \frac{\cos(\theta) - \cos(\eta)}{\theta}$ . Dessa forma, pode-se inferir que  $\frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} \geq \frac{2}{\pi} \therefore \text{sen}(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi}$ .

No entanto, com arrimo da figura que segue, pode-se depreender, rapidamente, a mesma propriedade, do ponto de vista geométrico. Com efeito, ao lado esquerdo, vê-se um trecho do gráfico da função  $f(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta}$ ,  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  e uma reta  $y = \frac{2}{\pi}$ . A propriedade que se pode estimular ao aluno compreender diz respeito ao comportamento de decrescimento no intervalo que se indica, isto é, deve ocorrer que  $f'(\theta) < 0$  e depreender/extrair a informação  $\frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}$ .

**Figura 4 -** Visualização de propriedades matemáticas que antecedem o uso formal de teoremas e a visualização da região de integração e os respectivos polos no espaço  $\mathbb{R}^2$



Fonte: Os autores.

Situação de institucionalização. Almouloud (2007, p.40) esclarece que “uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio da classe embora não tenha ainda o estatuto de saber social”. Desse modo, tendo em vista tornar oficial determinado saber e indicar a relevância de incorporá-lo ao patrimônio cultural da classe, o seguinte teorema deverá ser enunciado e, em adequação ao público de interesse (alunos de licenciatura ou bacharelado), pode ser demonstrado.

**Teorema:** Tem-se que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{icx} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f(z) \cdot e^{icz}, z_j)$ , em que  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_k$  são os polos de  $f$  no semi-plano superior  $I\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ . Em particular, se todos os coeficientes de  $f$  são números reais, então  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos(cx) dx = \text{Re}[2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f(z) \cdot e^{icz}, z_j)]$  e  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \sin(cx) dx = \text{Im}[2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f(z) \cdot e^{icz}, z_j)]$ . (LINS NETO, 1996, p. 242 - 243).

**Demonstração:** Vê-se que a primeira fórmula conduz à verificação das duas últimas. Deve-se considerar a função  $f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}$ , com  $m \geq n + 2$ , com denominador sem zeros reais. Ademais, escreve-se  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |z^2 \cdot f(z)| = L, L \in \mathbb{R}$ . Assim, devem existir  $M > 0, r_0 > 0$  tais que:  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$ , sempre que  $|z| \geq r_0$ . Observe-se que, quando se considera  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{icx} dx$ , veja-se que a função  $f(x)$  não possui polos no eixo real. Isso posto, veja-se que  $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{icx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot |e^{icx}| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = M \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2} dx = M \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-\infty}^{+\infty} = -M \cdot \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x} \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{x} \right] \right) \rightarrow 0$ . Isto é, a integral, sobre o eixo real, possui comportamento de convergência. Daí, pode-se escrever  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{icx} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} f(x) \cdot e^{icx} dx$ .

Toma-se  $r \geq r_0$ , e reparar que o disco  $\Delta(0, r)$  contém todos os polos possíveis de  $f$ . Em seguida, considere-

se o caminho  $\gamma_r = \alpha_r + \beta_r$ , em que  $\alpha_r(t) = t, -r \leq t \leq r$  e  $\beta_r(t) = r \cdot e^{it} = r \cos(t) + i \cdot r \sin(t), t \in [0, \pi]$

Pelo Teorema dos resíduos, escreve-se:  $\int_{\gamma_r} f(z) \cdot e^{icz} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f(z) \cdot e^{icz}, z_j)$ , aonde  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_k$  são os polos de  $f$  no semi-plano superior. Por outro lado, desde que  $\gamma_r = \alpha_r + \beta_r \therefore \alpha_r = \gamma_r + (-\beta_r)$ , segue:

$$\int_{-r}^{+r} f(x) \cdot e^{icx} dx = \int_{\alpha_r} f(z) \cdot e^{icz} dz = \int_{\gamma_r} f(z) \cdot e^{icz} dz - \int_{\beta_r} f(z) \cdot e^{icz} dz$$

Agora, busca-se verificar que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\beta_r} f(z) \cdot e^{icz} dz = 0$

Todavia, observe-se que  $\left| \int_{\beta_r} f(z) \cdot e^{icz} dz \right| \leq \int_{\beta_r} |f(z) \cdot e^{icz}| |dz| = \int_{\beta_r} |f(z)| |e^{icz}| |dz| \leq \frac{M}{r^2} \int_{\beta_r} |dz| \leq \frac{M}{r^2} \int_{\beta_r} |e^{it}| dt = \frac{M}{r^2} \int_0^\pi |e^{i(r \cos(t) + i r \sin(t))}| r dt = \frac{M}{r^2} \int_0^\pi |e^{i r \cos(t)}| e^{-r \sin(t)} r dt = \frac{M}{r^2} \int_0^\pi e^{-r \sin(t)} dt \leq \frac{2M}{r^2} \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin(t)} dt \leq \frac{2M}{r^2} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2ct}{\pi}} dt = \frac{2M}{r^2} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2cr}{\pi} u} du = -\frac{M\pi}{cr^2} \int_0^{\pi/2} e^{-u} du = -\frac{M\pi}{cr^2} [e^{-u}]_0^{\pi/2} = \frac{M\pi}{cr^2} \left[ 1 - e^{-\frac{\pi}{2}} \right] \leq \frac{M\pi}{cr^2} \left[ 1 - \frac{1}{e^{cr}} \right] \therefore \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M\pi}{cr^2} \left[ 1 - \frac{1}{e^{cr}} \right] \rightarrow 0$

Por outro lado, quando se considera  $c = 0$  tem-se ainda  $\left| \int_{\beta_r} f(z) \cdot e^{icz} dz \right| \leq \int_{\beta_r} |f(z)| |dz| \leq \frac{M\pi}{r} \rightarrow 0$ , quando  $r \rightarrow +\infty$ . Finalmente, os argumentos anteriores generalizam os dados mobilizados na situação de formulação e de validação.

Situação-problema II: Decidir a convergência da seguinte integral imprópria ou generalizada  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

Comentários: Os alunos deverão identificar uma região ou intervalo que condiciona um sentido para integral generalizada. Nas abordagens que foram apreciadas nos compêndios especializados, os autores de livros costumam, simplesmente, definir por decreto a variação da integral. No caso anterior, os limites a serem discutidos e sugeridos aos mesmos são indicados por  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$  o que condicionará uma evolução da situação investigativa e culminará com o

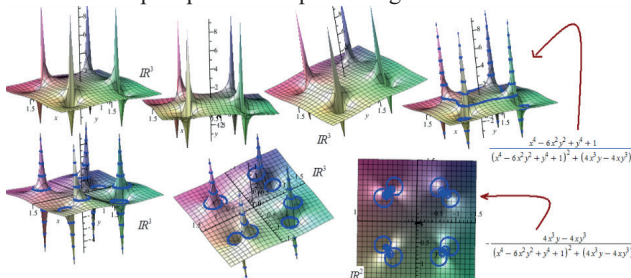


emprego da passagem à variável complexa e, dessa forma, com o emprego da Teoria do Resíduo.

Situação de ação. Com a identificação da função  $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$  que não possui nenhum ponto de descontinuidade na reta real, pode-se confrontar e estimular um debate com um grupo de estudantes e uma atividade de produção de conjecturas, tendo em vista a visualização de oito “crateras” ou “picos” que se divisam na figura abaixo. Pode-se fornecer aos estudantes as seguintes expressões analíticas, com o arrimo computacional, descritas por: ,

Assim, os estudantes devem ser conduzidos ao entendimento do surgimento de pontos que podem atuar como raízes das expressões polinomiais nos denominadores das duas expressões anteriores e que, quando lidam com a função  $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$ , não precisam se preocupar comos pontos de descontinuidade, todavia, quando consideram  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ , percebem a existência de pontos ou vetores que anulam o denominador!

**Figura 5** - Visualização de “crateras” ou “picos” relacionados com a existência de polos de uma função na variável complexa, condicionada pela parte real e parte imaginária

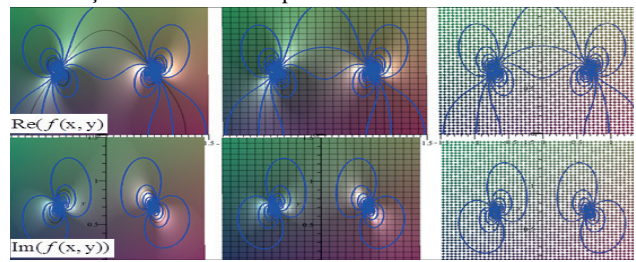


**Fonte:** Os Autores.

Situação de formulação. Segundo Almouloud (2007), uma das características dessa fase reside em “criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas”. A mediação busca explorar o sistema de representação do Cálculo na variável real e na variável complexa.

Desse modo, os estudantes deverão perceber o sentido e a necessidade de lidar com a seguinte expressão  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1} = \text{Re}(f(z)) + i \text{Im}(f(z))$  e, poderão desenvolver uma análise das expressões analíticas que constituem a parte real e a parte imaginária, que se indicará por  $\text{Re}(f(x,y)) + i \text{Im}(f(x,y))$ , isto é, com o uso de um sistema de representação algébrico do CVV. Agora, os estudantes poderão identificar os pontos que satisfazem  $z^4 + 1 = 0 \leftrightarrow z_k = e^{k\pi i/4}, k \in \{\pm 1, \pm 3\}$ . Todavia, com origem nas informações da figura abaixo, os alunos deverão deprender que, do conjunto das raízes  $z_1 = e^{\pi i/4}, z_2 = e^{3\pi i/4}, z_3 = e^{-\pi i/4}, z_4 = e^{-3\pi i/4}$  mas, apenas duas devem ser escolhidas.

**Figura 6** - Identificação visual de polos ou pontos de descontinuidade relacionados com as partes real e imaginária de uma função na variável complexa no  $\mathbb{R}^2$

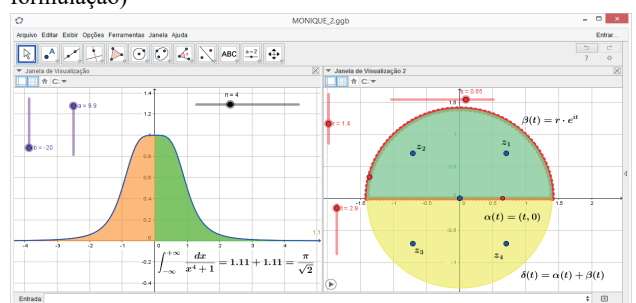


**Fonte:** Os Autores.

Na figura que segue, ao lado esquerdo, os alunos poderão explorar uma construção dinâmica do *software* GeoGebra e explorar o comportamento da integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1}$ , com valores  $n \geq 1$ . Com efeito, pode-se comparar o comportamento das integrais, descritas geometricamente como o valor da área numérica abaixo da curva e, para valores como  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^7 + 1}$ , o *software* indica-se uma indefinição e, ao lado direito, não visualiza-se mais uma região (na cor amarela) abaixo do gráfico da função (Figura 8).

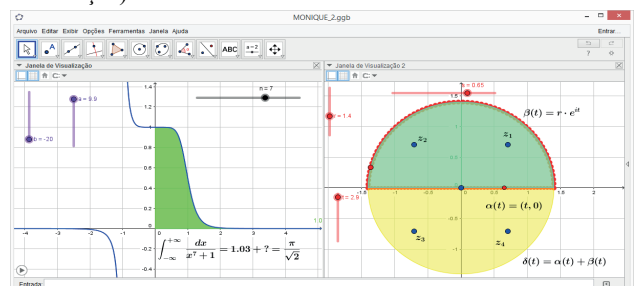
O *software* permite a promoção de um ambiente de investigação sobre o comportamento de convergência e sobre a validade ou confiança dos dados que devem ser elaborados pelos estudantes. Ademais, os estudantes devem coligar todos os dados visuais extraídos das duas janelas dos *softwares* que são vislumbrados logo abaixo (Figuras 7 e 8)

**Figura 7** - Exploração/verificação do comportamento de convergência  $n = 4$  (ao lado esquerdo) de uma integral e a localização dos polos no interior de uma região delimitada por uma curva parametrizada no sentido anti-horário (fase de formulação)



**Fonte:** Os autores.

**Figura 8** - Exploração/verificação do comportamento de divergência  $n = 7$  (ao lado esquerdo) de uma integral e a localização dos polos no interior de uma região delimitada por uma curva parametrizada no sentido anti-horário (fase de formulação)



**Fonte:** Os autores.

Situação de validação. Outras soluções poderão ser formuladas, todavia, pela estratégia que envolve a inserção da variável complexa, as formulações deverão culminar com o emprego do teorema que garante a igualdade  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i [\text{Re}s(f, z_1) + \text{Re}s(f, z_2)]$ , aonde  $z_1 = e^{\pi i/4}, z_2 = e^{3\pi i/4}$ . Por outro lado, os resíduos anteriores, tendo em vista as funções racionais em questão, podem ser avaliados da seguinte forma:  $\text{Re}s(f, z_1) = \frac{g(z_1)}{h'(z_1)}$  e  $\text{Re}s(f, z_2) = \frac{g(z_2)}{h'(z_2)}$ . Repare-se que nesse caso, assume-se que  $g(z) = 1, h(z) = z^4 + 1$ . Ora, vê-se que  $\text{Re}s(f, z_1) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4}$  e que  $\text{Re}s(f, z_2) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}$ .

Repare-se, que se poderia ter avaliado ainda que  $\text{Re}s(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{z^4 + 1} = \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{1}{z(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = -\frac{\sqrt{2}i(1+i)}{8}$

. E, de modo  $\text{Re}s(f, z_2) =$  semelhante, encontra-se que  $\lim_{z \rightarrow z_2} \frac{z - z_2}{z^4 + 1} = \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/4}} \frac{1}{z(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)} = -\frac{\sqrt{2}i(1-i)}{8}$ . Por tal via, os estudantes têm a possibilidade de adaptar habilidades envolvendo a noção de limite, estudadas no contexto do CUV e readaptados para AC.

Por fim, com origem na animação dinâmica que busca enfatizar um significado dinâmico da curva orientada, no sentido anti-horário, pela adjunção dos caminhos considerados (ver fig. 7, ao lado direito), escreve-se  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1} + \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dz}{z^4+1}$ . Para concluir a fase atual, se torna imprescindível os alunos compreenderem a necessidade da introdução da variável complexa com a ajuda de ambos os *softwares*. Nesse caso, a disposição geométrica das raízes da equação indicada por  $z^4 + 1 = 0$ , estimula tal necessidade, cuja existência é garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra (MITRINOVIC, 1966),

Situação de institucionalização. Brousseau (1986, p. 342) comenta que “a produção no ensino de conhecimento matemático demanda um esforço de transformação de um conhecimento em saber matemático [...]”. Assim, ele indica que a epistemologia do professor atuará no sentido de não personalização e não contextualização, e que buscará eliminar os traços históricos (BOTTAZZINI, 1986; HAIRER; WANNER, 2008; MEDVEDEV, 1991), que determinaram sua aparição.

Ora, a distinção de Brousseau é clara, no sentido de pontuar um conhecimento mobilizado, localizado e particular, pertencente a um grupo de alunos e que, gradualmente, receberá *status* de maior generalidade, pois enquadrado em um *corpus* teórico formal, cujo viés estruturalista se mostra evidenciado e distinguido na academia e pode ser apresentado para os estudantes pela exposição magistral de determinados teoremas clássicos, que validam alguns dos argumentos mobilizados nas fases descritas.

### 2.2.7 Análise a posteriori

Na fase anterior, todo o dispositivo construído deve ser colocado em funcionamento, como assim prevê Almouloud (2007). Possíveis correções e ajustes locais não podem ser

negligenciados em uma eventual aplicação empírica. Dessa forma, indica-se apenas alguns elementos que carecem de vigilância em um caso de experimentação. Para tanto, recorda-se que “a análise *a posteriori* de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições de transmissão do saber em jogo”.

Não se pode perder de vista as considerações de Laborde (1997, p.103) ao mencionar que a validação da ED consiste em “comparar os resultados de duas modelizações diferentes para o mesmo objeto”. Neste caso, com a intenção precípua de maior obtenção de dados para a etapa final, o modelo de comparação reside em considerar as mesmas situações didáticas, aqui discutidas, com outras abordagens que exibem ênfase maior na etapa de institucionalização, característico de um ensino acadêmico que evidencia os aspectos estruturantes da Matemática, em detrimento de uma abordagem qualitativa e numérica (ARTIGUE, 2013). Seguindo ainda as orientações de Laborde (1997), indica-se uma validação externa envolvendo uma apreciação comparativa das produções de estudantes submetidos aos dois problemas anteriores, todavia, sem a exploração e uso dos *softwares* empregados aqui ao decurso das fases didáticas de ensino.

Nesse contexto, podem ser antevistos - os seguintes elementos preocupantes: os estudantes não percebem a necessidade de passagem  $x = x + i0 \Rightarrow z = x + iy$ ; os estudantes não desenvolvem atividades investigativas sobre a convergência/divergência de integrais do tipo  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1}$ , com  $n \geq 1$ ; os estudantes não compreendem as mudanças exigidas na transição  $\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int f(z)dz$ ; a produção de conjecturas (emprego de metáforas) e um raciocínio heurístico se mostra reduzido e, mesmo inexistente, diante da preponderância de um pensamento lógico e de estrutura inferencial. E, por fim, os estudantes não compreendem a utilidade da introdução de uma variável complexa.

Na medida em que a mediação didática pretendida atua no sentido do distanciamento ou desconsideração dos elementos mencionados há pouco, prevê-se a obtenção de dados empíricos que devem autorizar/proporcionar ao pesquisador responder aos dois questionamentos indicados na terceira seção no presente escrito. E, por fim, tendo em vista que a atual proposta de (ED) possui certas características comentadas por Margolinas (1999) no que concerne à intervenção do professor ao decorrer das situações-didáticas, assinala-se que sua estratégia de base envolve uma intervenção direta em cada momento, tendo em vista a exploração e identificação de elementos perceptuais representativos em cada construção (ALVES, 2014a).

### 3 Conclusão

A presente proposta teórica de (ED) buscou discutir e descrever elementos de ordem teórica, imprescindíveis em uma proposta de mediação de ensino que não desconsidera a

visualização como elemento impulsionador da ação do aprendiz em um ambiente de situação problema, e como elemento catalizador da produção de conjecturas, cujo conteúdo revela a mobilização de um entendimento tácito, local e provisório, mas que com os momentos dialéticos previstos pela (TSD) poderá evoluir, com um ganho progressivo de aspectos estruturantes, impulsionado por intermédio de uma “evolução qualitativa” dos conhecimentos dos sujeitos envolvidos nas atividades propostas.

Acentua-se que nas duas situações problemas discutidas e em algumas das fases previstas pela (TSD), o aluno depara a transição simbólica  $\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int f(z)dz$ . Ora, tal simbologia cifrada permite, com arrimo<sup>L</sup> da tecnologia, sua significação geométrica e, dessa forma, os aprendizes devem compreender a necessidade da escolha de simbologias ou notações ( $\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(z)dz$ ), da mudança de variável, tendo em vista o processo investigatório alavancado em cada situação didática.

Em outro sentido, quando se observa desmesurada ênfase ao momento de institucionalização, a epistemologia do professor se caracteriza pelo uso da variável complexa e um sistema notacional restrito, tendo em vista alguns teoremas clássicos, como neste caso, em que se aborda o Teorema do Resíduo. Em contrapartida, os elementos pontuados nas fases que antecedem a institucionalização devem auxiliar uma perspectiva de construção de situações fundamentais, elaboradas a partir de um saber específico com vistas ao ensino no contexto da Transição Complexa do Cálculo (TCC).

Nas fases dialéticas de mediação da (TSD), acentua-se que a transposição didática poderá ser afetada pelo tempo de uso dos *softwares GeoGebra* e do *CAS Maple*, em caráter de complementaridade. Seu uso pode ser determinante na exploração da transição dimensional, fato que possibilita os estudantes mobilizarem seus conhecimentos do Cálculo em várias variáveis no contexto de ensino da (AC). Ademais, com origem em uma mediação afetada e modificada pelo uso dos *softwares*, indicam-se elementos que podem instigar os interesses dos estudantes, tendo em vista a depersonalização e verificação formal dos resultados, caracterizando as fases de institucionalização que foram apresentadas.

Finalmente, a elaboração de um problema é um passo da Engenharia Didática. Nesse contexto, o término da Engenharia Didática designa. Diante das considerações de Doaudy e de modo afetado pelo seu ponto de vista, defende-se a presença de elementos diferenciados presentes nas duas situações discutidas aqui e que detêm o potencial de aplicação e testagem em sala de aula, tendo como escopo o aperfeiçoamento de sua transmissão na academia, sem desconsiderar os elementos da Transição Complexa do Cálculo que ainda exigem maior atenção por parte dos especialistas.

## Referências

ALMOULOU, A.S. *Fundamentos da didática da Matemática*. São Paulo: UFPR, 2007.

ALMOULOU, A.S.; SILVA, M.J.F. Engenharia didática: evolução e diversidade. *REVEMAT*, v.7, n. 2, p.22-52, 2012.

ALVES, F.R.V. *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias intuitivas do Cálculo a Várias Variáveis*. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2011.

ALVES, F.R.V. *INSIGHT*: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do Cálculo. *Rev VYDIA Educ.*, v.32, n.2, p.149-148, 2012.

ALVES, F.R.V. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e a priori. *Rev Bras. Ensino Ciênc. Tecnol.*, v.7, n.3, p.148-168, 2014a.

ALVES, F.R.V. Técnica Computacional para o Ensino de Matemática Computational Technique for Teaching Mathematics–*CT<sup>2</sup>M*. *Em Teia*, v.5, n.2, p.1-9, 2014b.

ALVES, F.R.V. Aplicações no Ensino de Variável Complexa: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple. *Rev Inst. GeoGebra Int.* São Paulo, v.3, n.2, p.1-22, 2014c.

ALVES, F.R.V. Visualizing the behavior of infinite series and complex power series with the GeoGebra. *GeoGebra Int. J. Romania*, v.4, n.1, p.1-10, 2014d.

ALVES, F.R.V. Visualização de Teoremas em Análise Complexa: exemplos no contexto da Transição Complexa do Cálculo TCC. *Rev Sinergia - IFSP*, v.16, n.1, p.65-76, 2015.

ALVES, F.R.V.; BORGES NETO, H. Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. *Educ. Matem. Pesq.*, v.13, n.13, p.598-625, 2011.

ALVES, F.R.V.; BORGES NETO, H.; ALVES DIAS, M. Implicações e aplicações da Teoria das Representações Semióticas no ensino do Cálculo. *J. Int. Estudos Educ. Matem.*, v.5, n.1, p.54-84, 2012.

ARSLAN, S. *L'approche qualitative des equations differentielles en classe terminal's: est-elle viable? Quels sont les enjeux et les consequences?*. Grenoble: Université Joseph Fourier. 2005.

ARTIGUE, M. Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. *Les Cahiers Rouge de Didactique des Mathématiques*, v.8, n.1, p.1-38, 1984.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactiques. In: BRUN, J. (Org.). *Didactique de Mathématiques*. Reims, France. 2003 p.243-264.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. Brun, J. *Didactique des Mathématiques*. Paris: Délachaux et Niestle, p. 243-263, 1995.

ARTIGUE, M. Épistémologie et Didactiques. *Recherche Didactique Mathém*, v.10, n.2, p.241-286, 1990.

ARTIGUE, M. Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de La Asociación Venezolana*, v.10, n.2, p.117-134, 2003.

ARTIGUE, M. Didactical design in Mathematics Educatio Carl Winslow. *NORMA08*, Copenhagen: Sense, 2009.

ARTIGUE, M. L'éducation mathématique comme champ de recherché et champ de pratique: resultats et défis. *Em Teia*, v. 3, n. 3, p.1-18, 2012.

ARTIGUE, M. L'impactcurriculaire des Technologies sur L'Éducation Mathématiques. *Em TEIA*, v. 4, n.1, p.1-15, 2013.

BLOCH, I. *Quelques apports de la Theorie des Situations à la didactique des Mathématiques dans l'enseignement secondaire et superieure*. (habilitation de recherché). Aquitaine: IUFM, 2006.

BOTTAZZINI, U. *The Higher Calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag, 1986.



- BRADEN, Bart. Picturing Functions of a Complex Variable. *Coll Mathem. J.*, v.16, n.1, p.63-72, 1985.
- BRIDOUX, S. *Enseignement des premières notions de topologie à L'Université.* (thèse de doctorat). Paris: Paris VII, 2012.
- BROUSSEAU, G. *Perspective pour la didactique des mathématiques: vingt ans de didactique des mathématiques en France.* Paris: La Pensée Sauvage, 1994.
- BROUSSEAU, G. Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q.*, p.14-24, 1988.
- BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathém.*, v.7, n.2, p.33-115, 1986.
- BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. BROUSSEAU, G. *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998. p.115-160.
- BRUM, W.P.; SCHUHMACHER, E.A. Engenharia didática como campo metodológico para o planejamento de aula de matemática: análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. *J. Int. Estud Educ Mat*, v 6, n.2, p.60-84, 2013.
- CECÍLIA, S.F.; BERNADEZ, C. *Introdução às funções de uma variável complexa.* Rio de Janeiro: SBM, 2008.
- CHAVEZ, E. *Teaching Complex Numbers in High School.* (Dissertation in Natural Sciences). Louisiana: Louisiana State University, 2014.
- CHEVALLARD, Y. *La Transposition Didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage Édition, 1991.
- CONWAY, J.B. *Functions of One Complex Variable.* Second Editio New York: Springer Verlag, 1978.
- DANENHOWER, P. *Teaching and Learning Complex Analysis in at two British Columbia Universities.* Canadá: Simon Fraser University, 2000.
- DOUADY, R. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. ARTIGUE, M. et al. *Ingeniería didáctica em educación.* 1995. p.62-96,
- DOUADY, R. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. In: GOMEZ, P. (Org.) *Ingeniería Didáctica em Educación Matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, p. 1 –7, 1995.
- DOUADY, Régine. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. In: GOMEZ, P. (Org.) *Ingeniería Didáctica em Educación Matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. p.61-97,
- DOUADY, R. Géométrie, graphiques, fonctions au collège. *Rev Electr Investig Educ Cienc.* n.1, p.1-7, 2008.
- FLANIGAN, F.J. *Complex Variables: harmonic and analytic functions.* California: San Diego State University, 1972.
- FISKE, T. *Functions on a complex variables.* Fourth editio New York: John Wiley and Sons, 1906.
- GHEDAMSI, I. *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université: Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique..* Bourdeux: Université Bourdeux II, 2009.
- GONG, S. *Concise complex analysis.* New Jersey: World Scientific, 2001.
- GLUCHOFF, A.D. Complex power series-a vector field visualization. *Mathem. Magazine*, v.66, n.3, p.189-191, 1993.
- HAIRER, E.; WANNER, G. *Analysis by Its History.* New York: Springer, 2008.
- HANSON, A.; SHA, J. Exploring visualization methods in Complex Variables. *Computational Geometry and Object Modeling*, v.5, n.5, p.90-109, 1998.
- HARDING, A.; ENGELBRECHT, J. Sibling curve 3: imaginary and tracing complex roots. *Int. J. Mathem. Educ. Sci. Technol.*, v.40, n.7, p.989-996, 2009.
- LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques em classe: défis et tentatives. *DIDASKALIA*, v.10, n.1, p. 97-112, 1997.
- LINS NETO, A. *Funções de uma variável complexa.* Rio de Janeiro: SBM, 1996.
- KRANTZ, S. G. *Complex Analysis: the geometric view.* New York: American Mathematical Society, 1990.
- MARGOLINAS, C. Dévolution et intuitionnalisation: deux aspects antagonistes du rôles du maître. In: COMITI, C.; BESSOT, M.P. *Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants*, p.342-347, 1995.
- MARGOLINAS, C. Les pratiques de l'enseignant: Une étude de didactique des mathématiques: recherche de synthèses et perspectives. *Recherche em Didactique de Mathématiques*, p.10-33, 1999.
- MARGOLINAS, C. *Points de vues de l'élève et du professeur : essai de développement de la théorie des situations didactiques* (Habilitation de recherche). Provence: Université de Provence. 160f, 2004.
- MEDVEDEV, F. A. *Scenes from the History of real functions.* Birkhäuser Verlag: Berlim, 1991.
- MITRINOVIC, D. S. *Calculus of Residues.* Netherlands: P. Noordhoff , 1966.
- NEEDHAM, T. *Visual Complex Analysis.* Oxford: Oxford University Press, 2000.
- POLYA, G.; LATTA, G. *Complex Variables.* Nova York: John Willey and Sons, 1974.
- PEREZ, A. M. *Visualizing Complex Solutions of Polynomials.* (Master of Arts). Austin: University of Texas, 2012.
- RUDIN, W. *Real and Complex Analysis.* New York: McGrall-Hill Book Company, 1986.
- SANTOS. L. C. *Funções complexas de uma variável complexa: uma abordagem via software Mathematica.* Campinas: Unicamp, 1998.
- SHOKRANIAN, S. *Uma introdução à Variável Complexa,* São Paulo: Moderna, 2011.
- TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking.* London: Klumer Publishers, 1991.
- TIROSH, D.; ALMOG, Conceptual adjustments in Progressing from Real and Complex Numbers. 13 th. *Proc. Psychol. Mathem. Educ. - PME*, p. 221 – 227, 1989.
- TOMASIUNAS, R. Visualizing complex integration with the GeoGebra. *GeoGebra Int Romania*, v.2, n.2, p.77-84, 2012.
- VERGNAUD, G. Quelques orientation théoriques et methodologiques des recherches française em Didactiques des Mathématiques. *Recherche Didactique Mathém.*, v.2. n.2, p.215-231, 1981.
- VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherche Didactique Mathém.*, v.10, n.2/3, p.133-170, 1990.
- WEGERT, E.; EMLER, G. Phase Plots of complex functions: a



journey in illustration. *AMS*, v.58, n.6, p.768-780, 2011.

WEGERT, E. *Visual complex functions: an introduction with the phase portrait*. New York: Birkhäuser, 2012.

WINSLOW, C. Semiotic and discursive variables and CAS-Based Didactical Engineering. *Educ. Studies Mathem.*, v.52,

p.271-288, 2003.

WINSLOW, C. Transformer la theorie en tâche: la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In: ROUCHEIER, R. et al. *Actes de la XIIIème École d'été de Didactique des Mathématiques*. Paris: La Pensée Sauvage, 2006. p.1-12.