

Como alunos de Ensino Médio Compreendem os Invariantes Prescritivos de Ordem e Repetição em Problemas de Arranjo e Combinação?

How do High School Students Understand the Prescriptive Invariants of Order and Repetition in Arrangement and Combination Problems?

Karolina Lima dos Santos Araújo^{a*}; Cristiane de Arimatéa Rocha^{ab}

^aUniversidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. PE, Brasil.

^bUniversidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnologia. PE, Brasil.

*E-mail; karolinaaraujo789@hotmail.com

Resumo

Esse artigo objetiva analisar conhecimentos de estudantes têm em relação aos invariantes e representações de problemas de arranjo e combinação. Para tanto, fundamentou-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Como percurso metodológico realizou-se um estudo experimental constituído de pré-teste, intervenção e pós-teste em 28 estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Na intervenção utilizou-se a comparação de problemas de arranjo e combinação, para que os alunos verificassem o comportamento do invariante prescrito da ordenação e repetição, além de variadas representações simbólicas. Na análise dos resultados observou-se que estudantes no pré-teste apresentaram dificuldades na diferenciação de problemas de arranjo e combinação, principalmente nas situações que envolviam a repetição de elementos. Durante a intervenção observou-se que a maioria dos estudantes preferia utilizar a fórmula e o princípio fundamental da contagem como procedimentos de resolução. Após o pós-teste notou-se um avanço no desempenho dos estudantes na resolução de problemas com repetição de elementos, além de maior variabilidade de representações simbólicas, no entanto, no problema de combinação simples os estudantes não obtiveram um desempenho maior. Constatou-se que o uso incorreto da fórmula foi o erro mais frequentemente observado na resolução de problemas combinatórios, o que pode sugerir que ao utilizar fórmula como meio de representação simbólica os estudantes não compreendem corretamente a presença ou não do invariante prescrito de ordem e repetição nos problemas de arranjo e combinação.

Palavras-chave: Arranjo e Combinação. Invariantes Prescritivos. Representações Simbólicas.

Abstract

This article aims to analyze students' knowledge regarding invariants and representations of arrangement and combination problems. For this, it was based on Vergnaud's Conceptual Field Theory. As a methodological course, an experimental study was performed consisting of pre-test, intervention and post-test in 28 students of the 2nd year of High School. In the intervention we used the comparison of arrangement and combination problems, so that the students verified the behavior of the prescriptive invariant of the ordering and repetition, besides several symbolic representations. In the analysis of the results, it was observed that students in the pre-test presented difficulties in the differentiation of problems of arrangement and combination, mainly in the situations that involved the repetition of elements. During the intervention it was observed that most students preferred to use the formula and the fundamental principle of counting as resolution procedures. After the post-test it was noticed an improvement in the students' performance in solving problems with repetition of elements, in addition to a greater variability of symbolic representations, however, in the simple combination problem students did not perform better. It was found that the incorrect use of the formula was the error most frequently observed in solving combinatorial problems, which may suggest that when using formula as a means of symbolic representation students do not correctly understand the presence or not of the prescriptive invariant of order and repetition problems of arrangement and combination.

Keywords: Arrangement and Combination. Prescriptive invariants. Symbolic representations.

1 Introdução

O ensino e a aprendizagem da Combinatória são marcados por vários desafios que advém desde a formação inicial e continuada de professores, como também pela natureza dos problemas combinatórios. Estudos como de Roa (2000), Pessoa e Borba (2009, 2010) apresentaram que alunos, inclusive de diferentes níveis de escolarização, sentem dificuldades na diferenciação de problemas combinatórios. Rocha (2011) e Holanda (2016) ressaltaram em seus estudos que professores de diferentes níveis de ensino, ou mesmo alunos de licenciatura em matemática, também sentem certa dificuldade nessa diferenciação.

Johnson (1991) afirma que para um estudante conseguir

raciocinar por meio da Combinatória necessita-se a exploração criativa de aspectos estruturais de um problema, na esperança de vir a reduzi-lo a um caso mais simples ou a um problema anteriormente resolvido. Visando a compreensão das diferenças existentes em cada tipo de problema combinatório, estudos como Borba *et al.* (2014), Pessoa e Borba (2010), Rocha (2011), podem dar pistas para tal exploração criativa, utilizando problemas combinatórios com menor ordem de grandeza o que pode possibilitar que os alunos descubram ou elaborem diferentes procedimentos de resolução, o que por sua vez pode permitir a ampliação da percepção das diferentes naturezas dos problemas combinatórios.

Borba *et al.* (2014) afirmam que as situações combinatórias

possuem relações lógico-matemáticas, sendo o estudo destas uma rica oportunidade de desenvolvimento dos estudantes. Essa característica dos problemas combinatórios coaduna com os objetivos apontados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) para o Ensino Médio quando orientam que o ensino e a aprendizagem de Combinatória possibilitam decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2002).

Geralmente vivenciado na última etapa da Educação Básica com maior ênfase durante o 2º ano do Ensino Médio, o ensino e aprendizagem de Combinatória deve ser potencializado com a discussão das diferentes situações, oportunizando a criação de estratégias pessoais de resolução ou mesmo ampliando a variedade de procedimentos de resolução.

Dias, Freitas e Victor (2017) ao citar as dificuldades de Combinatória de estudantes do Ensino Médio afirmam que estas ocorrem possivelmente devido ao método que o conteúdo é ensinado, pois o aluno tem contato somente ensino médio, de maneira abstrata e por meras aplicações de fórmulas, tornando o ensino deste tema pouco atrativo e distanciado de suas vivências.

Borba (2016) ressalta que é possível utilizar elementos da Combinatória tanto nas situações do cotidiano quanto nos problemas que é ensinado na escola, para esta autora “mesmo que não nos demos conta, diversas decisões que tomamos cotidianamente são baseadas em levantamento de possibilidades, resultantes da combinação de elementos” (p.1). Sabe-se que não é preciso enumerar todas as opções para escolher uma delas, mas a tomada de decisão torna-se mais consciente se os estudantes compreende uma gama maior da diversidade de opções.

Pessoa e Borba (2010) em sua investigação concluíram que os estudantes do Ensino Médio tiveram um desempenho abaixo do esperado, pois apenas 12,2% destes estudantes conseguiram resolver corretamente a situação envolvendo combinação simples e apenas 43,1% acertaram a situação que envolveu arranjo simples. As autoras verificaram que os problemas de combinação são tidos como os mais difíceis por estes estudantes e que a maioria não conseguiu chegar ao resultado correto, o que demonstra que no Ensino Médio os estudantes apresentam muitas dificuldades com a aprendizagem da Análise Combinatória.

Investigando o ensino e aprendizagem das operações combinatórias por estudantes do Ensino Médio realizada sobre uma intervenção e aplicação de um teste em duas fases, Fernandes, Correia e Roa Guzmán (2010) concluíram que estes estudantes apreciam o uso das Fórmulas apenas nos problemas de combinação simples e dentre os erros o que ocorreu com predominância foi associado a não consideração da ordem quando ela era relevante. Diante deste resultado

observamos que os estudantes têm dificuldades ao diferenciar os problemas combinatórios quanto a ordem dos elementos.

Conceição, Pereira e Santos (2016) investigaram sobre o ensino e aprendizagem de Combinatória por 79 estudantes do terceiro ano do Ensino Médio utilizando como metodologia a aplicação de questionários e testes obtendo como resultados que o uso de fórmula-aplicação torna os discentes menos capazes de solucionar problemas relativos à Análise Combinatória, comparados aos alunos que estudaram o assunto por PFC. Diante destes resultados os autores constataram que o uso das fórmulas não garante uma aprendizagem eficaz e que os estudantes se sentem mais seguros quando utilizam o Princípio Fundamental da Contagem ao resolver os problemas combinatórios.

Rocha (2011) afirma que professores de diferentes níveis de ensino (anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, e Ensino Médio) têm dificuldades na diferenciação de problemas de arranjo e combinação. Tais professores, em sua maioria, desconhecem situações nas quais o invariante do conceito de ordenação implica em possibilidades distintas.

Diante desta afirmação podem-se compreender algumas dificuldades de estudantes com os problemas de combinação e arranjo. Tais problemas se caracterizam pela formação de subgrupos e pela presença ou ausência da ordenação no processo de contagem de elementos, ou em outros casos, podem ser considerados ou não a repetição de elementos nessa contagem.

Para auxiliar na discussão compreensão de algumas dificuldades e de algumas características dos problemas combinatórios, utilizou-se como aporte a Teoria dos Campos Conceituais, em especial, a noção de invariantes prescritivos e representação simbólica.

Vergnaud (2009) discute a necessidade de conhecer *invariantes operatórios* que podem se apresentar na relação entre a realidade e a representação, se constituindo nas relações e propriedades que os alunos colocam em ação na resolução de situações, podendo ser verdadeiros ou falsos a depender da situação.

O *invariante prescritivo* ou *do conceito* focalizam as relações e propriedades de conceitos e que são necessários para compreensão do mesmo. Nesse caso, esses tipos de invariantes são inerentes aos conceitos matemáticos, tais como os problemas combinatórios e de acordo com Silva (2016) não se alteram com relação a representação simbólica usada, ou mesmo a variação de um mesmo tipo de situação.

Vergnaud (1986) define ainda o *invariante relacional* como “uma relação que permanece invariante para um conjunto de transformações de operações ou de variações” (p.82). Nesse caso, diz respeito à interpretação do enunciado para identificação do tipo de problema. Partindo do exposto, compreende-se que as diferentes noções de invariante é um instrumento que se devidamente utilizado possivelmente proporciona segurança no momento da construção da

representação dos conceitos.

Portanto, defende-se que a necessidade de investigar que conhecimentos os alunos que passaram pelo ensino de combinatória na etapa final de escolarização possuem dos diferentes invariantes nos problemas combinatórios. Dessa forma, objetivou-se analisar os conhecimentos dos alunos do 2^a ano do Ensino Médio em relação aos invariantes prescritos de problemas de arranjo e combinação, em especial, o desempenho dos estudantes, antes e após uma intervenção, na resolução e identificação dos invariantes de ordem e repetição em problemas de arranjo e combinação.

2 Material e Métodos

Essa investigação teve por objetivo analisar os conhecimentos dos alunos do 2^a ano do Ensino Médio em relação aos invariantes prescritos de problemas de arranjo e combinação, em especial, o desempenho dos estudantes, antes e após uma intervenção, na resolução e identificação dos invariantes de ordem e repetição em problemas de arranjo e combinação, além de verificar as representações simbólicas apresentadas. Para Magina *et al* (2008, p.12) “a análise das tarefas matemáticas e o estudo da conduta do aluno, quando confrontado com essas tarefas, que nos permitem analisar a sua competência”.

Nessa perspectiva, foram analisadas as resoluções de 28 estudantes de uma turma do 2^o ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do agreste pernambucano, em 12 questões (seis no pré-teste e seis no pós-teste). A ordem de grandeza envolviam as propriedades de arranjo e combinação com número de possibilidades menor que 25, pois assim permite-se também a resolução sem a utilização apenas da fórmula.

A turma já tinha vivenciado o conteúdo de Combinatória no semestre anterior a aplicação desta pesquisa, o que permitiu realizá-la, pois o foco era saber como estavam os conhecimentos dos estudantes após terem visto este conteúdo.

O procedimento de coleta de dados foi dividido em três etapas. A primeira etapa se constituiu da aplicação de um *pré-teste*, o mesmo possuía seis questões sendo quatro destas abertas e as duas últimas de múltipla escolha, nas quais necessitavam da justificativa do tipo de situação apresentada no problema proposto. O *pré-teste* teve o intuito de verificar o nível de desempenho desta turma para que então fosse possível realizar a aula de intervenção.

Na segunda etapa foi realizada a *intervenção* com o foco nos invariantes prescritos dos problemas de arranjo e combinação. Durante a mesma foi proposto dez problemas combinatórios envolvendo as situações de arranjo simples, combinação simples, arranjo com repetição e combinação com repetição. Sendo que seis destes problemas eram com questões abertas e quatro destes com questões de múltipla escolha, ressaltando que seis dos dez problemas foram aplicados durante o *pré-teste*.

A intervenção consistiu em dois momentos: O primeiro teve base na comparação entre os invariantes do conceito dos

problemas combinatórios de arranjo e combinação, simples e com repetição.

Como primeira atividade apresentou-se dois problemas (arranjo e combinação simples) para que os alunos identificassem o invariante prescritivo de ordem, conforme exposto nas Figuras 1 e 2:

Figura 1 - Exemplo de situação de arranjo simples

<p>Exemplo de Arranjo Simples: Ana, Bruno, Carlos e Diego concorrem a disputa do representante e vice-representante de uma turma. Quantas são as possibilidades da escolha do representante e vice-representante desta turma?</p>
--

Fonte: Adaptado de Araújo (2017)

Figura 2 - Exemplo de situação de combinação simples

<p>Exemplo de Combinação Simples: Ana, Bruno, Carlos e Diego formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quantas são as possibilidades de escolha para representar esta equipe nesta apresentação?</p>
--

Fonte: Adaptado de Araújo (2017)

Nesses exemplos utilizaram-se o mesmo contexto, modificando a situação de arranjo para que se transforme em uma de combinação simples, a fim de que a ordem na figura 2 não gerasse novas possibilidades. Escolheu-se para representação simbólica a enumeração por meio da árvore de possibilidades, na qual se evidencia a exclusão das possibilidades que não se adequam ao exigido pelos problemas.

Ao realizar a comparação entre esses dois exemplos observa-se a quantidade de pessoas do grupo inicial e do subgrupo formado é a mesma, pois são quatro pessoas no grupo inicial e duas pessoas no subgrupo. Apesar desta semelhança ressalta-se que os resultados foram diferentes e que na situação que envolveu a combinação simples (Figura 2) o número de possibilidades diminuiu. Com isto, enfatiza-se que o invariante da ordem é a principal diferença entre estas duas situações, ou seja, no arranjo a ordem gera novas possibilidades e, na combinação a ordem não gera novas possibilidades, por isto que a quantidade de subgrupos formados foi menor.

Logo em seguida compararam-se problemas de arranjo simples com arranjo com repetição e combinação simples com combinação com repetição. A seguir apresentam-se nas Figuras 3 e 4 exemplos de problemas de arranjo e combinação com repetição.

Figura 3 - Exemplo de situação envolvendo arranjo com repetição

<p>Exemplo de Arranjo com Repetição: Maria quer criar uma senha para seu notebook. Sabendo que a senha será formada por 4 dígitos e que ela deseja utilizar apenas os números 7 e 9. De quantas maneiras distintas Maria poderá criar esta senha? 7777, 9999, 7779, 7797, 7977, 7999, 9997, 9979, 9799, 7997, 9977, 9797, 9779</p>

Fonte: Adaptado de Araújo (2017)

envolvendo a formação de grupos na Combinatória, que são as situações identificadas como arranjo e combinação diferindo ambos pela ordem dos seus elementos. Pessoa e Santos (2012, p.3) discutem e apresentam os invariantes prescritos dos problemas de arranjo e combinação da seguinte forma:

Arranjo (1) tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais; (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que de um grupo maior, alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades. Combinação (1) tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais; (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. De forma semelhante aos problemas de Arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

As autoras identificam o invariante prescritivo dessas situações (combinação e arranjo) sendo ambos os casos que não é permitida a repetição dos elementos, ou seja, arranjo simples e combinação simples. Apresentando o invariante da ordem como a propriedade principal para diferenciar essas duas situações, em particular os problemas de arranjo a ordem gera novas possibilidades, já na combinação a ordem dos elementos não interfere, ou seja, a ordem não gera novas possibilidades.

Silva; Rocha (2015) discutiram a presença de invariantes prescritivos em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e descrevem que o “invariante da repetição, que pode ser considerado ou não dependendo do problema a ser resolvido”. Nesse caso, os estudantes e professores devem analisar a situação, contextos, e enunciados para identificar se esse invariante deve ou não ser considerado. Os autores ainda alertam que “[...] ao considerar as repetições, aumentamos consideravelmente as possibilidades, e desta forma pode mudar as estratégias de resolução das mesmas, assim deve ser considerada na análise das questões propostas” (SILVA; ROCHA, 2015. p.5).

Nesse caso, destacam-se a utilização de três tipos de invariantes prescritivos nos problemas de arranjo e combinação, um definido pela escolha dos elementos, outro pelo invariante da repetição, e o invariante da ordem como o principal para diferenciar estas situações combinatórias. Desta forma advoga-se que considerando ou não a ordem dos elementos, este será o fator essencial no momento da resolução, sendo assim o invariante fundamental para que se compreendam as lógicas implícitas em cada significado e situação dos tipos de problemas combinatórios.

Os desempenhos dos estudantes nos problemas combinatórios pesquisados foram organizados no Quadro 1 relativos ao pré-teste e pós-teste, de modo que possa mostrar o desempenho antes e após a intervenção.

Quadro 1 - Comparação do Percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste

	Combinação Simples	Arranjo Simples	Combinação com Repetição	Arranjo com Repetição
Pré-teste	28,5%	53,5%	3,5%	3,5%
Pós-teste	25%	64,2%	82,1%	39,2%

Fonte: Araújo (2017).

Ao observar os resultados obtidos no Quadro 1 percebeu-se que a única situação que teve um rendimento menor após a intervenção foi a situação que envolveu combinação simples, pois esta diminuiu 3,5 % dos acertos.

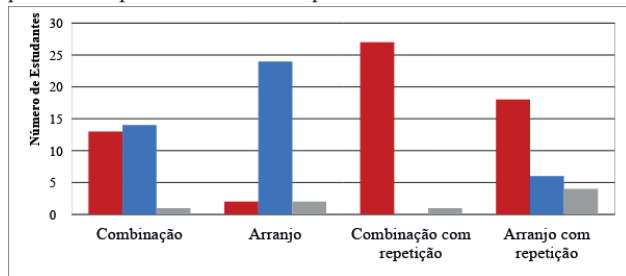
Justifica-se que esta queda tenha ocorrido devido às representações simbólicas utilizadas pelos estudantes ao resolverem essa situação, já que a maioria resolveu por meio da fórmula inadequada, assim como revelaram ter uma dificuldade maior durante a intervenção nestas situações de que as situações envolvendo arranjo. Observa-se que por muitas vezes estas situações oferece um grau de dificuldade maior para os estudantes e até mesmo aos professores. Rocha e Ferraz (2011, p.9) apontam que professores de diferentes formações (Pedagogia e Matemática) possuem “lacunas no conhecimento dos professores em relação à diferença dos problemas de arranjo e combinação”.

Ao observarmos o uso de fórmulas predominante por meio dos estudantes ao resolverem as situações de combinação percebemos que este resultado corrobora com o de Fernandes, Correia e Roa Guzmán (2010) quando discutem que a maioria dos estudantes utilizou a fórmula ao resolver os problemas de combinação. Diante destes resultados verificamos que no Ensino Médio esses estudantes tem preferência em usar a fórmula de combinação para resolver este tipo de problema e, que na maioria dos casos o fazem de uma maneira errada.

Já os problemas que envolveram a repetição dos elementos obtiveram um aumento significativo após a intervenção, pois nos dois casos abordados (arranjo com repetição e combinação com repetição) passaram de 3,5% para 82,1% em combinação e 39,2% em arranjo. O que demonstra que os estudantes compreenderam melhor o invariante prescritivo e as relações presentes nestas situações. Apresentam-se os gráficos com o número de confusões entre os diferentes tipos de problemas combinatórios antes e após a intervenção.

De acordo com os dados apresentados no gráfico da Figura 6 verificou-se que o problema que envolveu arranjo simples obteve o resultado positivo relacionado aos estudantes que não confundem essa situação-problema, sendo o de combinação com repetição o que revelou uma dificuldade maior por parte da maioria dos estudantes, pois destes apenas um não confundiu essa situação.

Figura 6 - Confusões de tipo de problemas combinatório produzidas pelos estudantes no pré-teste



Fonte: Araújo (2017).

Diante desses resultados percebemos que o invariante da repetição mostrou-se como o mais difícil para essa turma. De acordo com Silva e Rocha (2015) é necessário que os estudantes estejam cientes sobre a possibilidade de ocorrência da repetição em um problema combinatório, já que sua consideração pode mudar as estratégias de resolução da situação proposta. Acredita-se que esta turma não tenha considerado o invariante da repetição ao realizarem o pré-teste, principalmente na situação de combinação com repetição, por isto o invariante da repetição revelou-se como a maior dificuldade dos estudantes.

Foi constatado ainda que a maioria dos estudantes utilizou a fórmula nos problemas de combinação simples e com repetição, alguns fizeram uso do PFC ao resolver as situações de arranjo simples e com repetição. Vergnaud (2009, p.24) ao discutir sobre conjunto de representações simbólicas, apresenta como um de seus significados “[...] categorias de pensamento com os quais um indivíduo capta e integra as informações presentes em uma situação”. Os alunos que não forem alertados sobre a possibilidade do invariante prescritivo de repetição nos problemas combinatórios, dependem exclusivamente do contexto da situação, alertar ou não para a possibilidade.

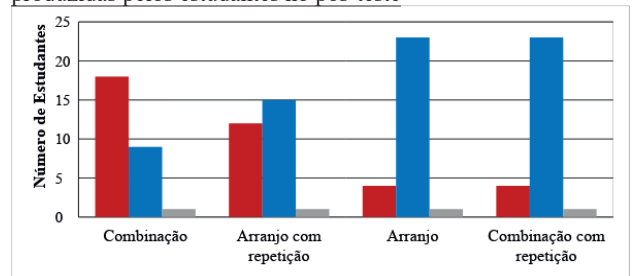
Vale salientar que a maioria dos estudantes que utilizou a fórmula não conseguiu fazer corretamente, o contrário aconteceu com os que resolveram por meio do PFC já que a maioria dos estudantes conseguiu resolver a situação problema corretamente. Conceição, Pereira e Santos (2016) também apresentaram que os estudantes que utilizaram o PFC para resolver as situações combinatórias obtiveram uma capacidade maior de resolver estas situações se compararmos aos que utilizaram a fórmula.

Barreto (2012, p.13) em pesquisa realizada com estudantes da EJA sobre o papel das representações em problemas combinatórios considera necessária a apresentação de várias representações se conjunto na construção de um conceito é importante “já que cada representação pode deixar mais evidentes determinadas propriedades invariantes de tal conceito”. A autora ressalta, ainda, a necessidade de que os alunos “além de aprenderem diferentes formas de representação simbólica, também possam aprimorar o uso de representações que já utilizam”.

Ao observar o gráfico da Figura 7 nota-se que houve um

avanço dos estudantes após a intervenção, já que no pré-teste a maioria dos estudantes obtiveram um desempenho baixo quanto a confusão das situações combinatórias abordadas.

Figura 7 - Confusões de tipo de problemas combinatório produzidas pelos estudantes no pós-teste



Fonte: Araújo (2017).

Como anteriormente mencionado, verificou-se que a única situação em que obteve a confusão do problema pela maioria dos estudantes foi a que envolveu combinação simples, as demais apresentaram um desempenho positivo. Este acontecimento trouxe surpresa, pois a combinação antes da intervenção obteve um número de estudantes superior que conseguiram identificar corretamente a situação proposta, já que todos os problemas combinatórios foram trabalhados de uma maneira igual durante a intervenção.

Este acontecimento relacionado ao bom desempenho que a maioria dos estudantes obteve após a intervenção acredita-se que tenha ocorrido devido ao método em que foi trabalho com esta turma o conteúdo no momento da intervenção, já que se fez o uso de diferentes representações simbólicas na resolução de cada problema proposto (combinação simples, combinação com repetição, arranjo simples e arranjo com repetição), assim percebeu-se que este procedimento proporcionou um rendimento melhor nesta turma, tal argumento corrobora com o que Barreto (2012) apresenta sobre a importância da construção de um conceito ao utilizar-se várias representações, pois segundo esta autora cada uma das representações deixa mais evidente as propriedades invariantes em cada conceito trabalhado.

Na comparação das situações de combinação simples e arranjo simples percebeu-se que a situação de arranjo foi tida como mais fácil ao se comparar com a de combinação por estes estudantes, tal resultado também foi observado por Pessoa e Borba (2010) quando discutem que os estudantes do Ensino Médio revelam maior dificuldade em problemas envolvendo combinação do que os problemas de arranjo. Na comparação das questões de combinação do pré-teste e pós-teste, observa-se que não houve mudança de valores e o contexto foi o de formação de grupos de pessoas, o que reforça a não identificação do invariante prescritivo ou a escolha da utilização de fórmulas como representação simbólica pelos estudantes, possíveis justificativas para esse fato. A Figura 8 corrobora essa hipótese.

Figura 8 - Protocolo de Resolução de problema de combinação simples com uso de fórmula incorreto do aluno 23 no pré-teste

1-Uma escola tem 6 professores de matemática, dos quais 3 deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 3 professores são possíveis?

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Fonte: Araújo (2017).

Nesse caso, o aluno confunde a fórmula de combinação, ou seja, apesar de realizar o cálculo relacional corretamente, identificando que o problema é de combinação, executa de maneira equivocada a fórmula utilizada. Esse fato corrobora com o apresentado por Barreto (2012) quando orienta um trabalho para o conhecimento das diferentes representações simbólicas, nesse caso específico, o tratamento das fórmulas. Sabe-se que uma das propriedades existentes entre problemas de Arranjo e Combinação é Que o número de combinações de n , p a p elementos, equivale ao número de arranjos de n , p a p elementos dividido pelo número de permutações de p elementos. Por isso, dividem-se pelo número de permutações de p elementos, para que as ordenações de p elementos sejam desconsideradas.

Na Figura 9, apresentam-se equívocos do uso de fórmula para os problemas de combinação com repetição. Nesse caso específico, o aluno 13 se equivoca tanto com relação ao invariante relacional, confundindo a combinação simples com a combinação com repetição (não leva em consideração a possibilidade de repetição dos elementos), como também utiliza a fórmula da combinação erroneamente.

Figura 9 - Protocolo de Resolução problema de combinação com repetição com uso de fórmula incorreto do aluno 13 no pré-teste

3-Um menino está em um parque de diversões, onde há 5 tipos de brinquedos: Chapéu Mexicano (Ch), Trem Fantasma (F), Montanha Russa (M), Carrossel (C) e Roda Gigante (R), o menino resolve comprar 2 bilhetes. Qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes, sabendo-se que ele também pode escolher ir duas vezes no mesmo brinquedo?

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 60 \text{ possibilidades}$$

Fonte: Araújo (2017).

Faz-se necessário analisar as questões de múltipla escolha do pré-teste e pós teste sem compará-las, pois como foi abordado quatro situações combinatórias nesta pesquisa e, em cada teste teve apenas duas questões de múltipla escolha com justificativa foi almejado saber se os estudantes sabiam identificar e justificar as situações de arranjo simples e combinação com repetição no pré-teste e as demais arranjo com repetição e combinação simples no pós-teste, analisando assim todas as situações- problemas propostas aos estudantes neste estudo.

Quadro 2 - Percentual de acertos das questões com justificativa no pré-teste e pós-teste

Pré-teste		Pós-teste	
Arranjo simples	Combinação com Repetição	Arranjo com Repetição	Combinação Simples
46,4%	28,5%	14,2%	60,7%

Fonte: Araújo (2017).

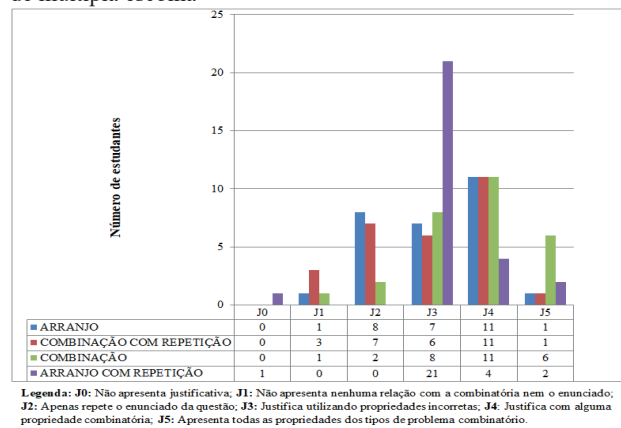
De acordo com os dados obtidos no Quadro 2 averiguou-

se que a situação que teve o menor desempenho do invariante relacional foi a de arranjo com repetição, seguida de combinação com repetição, arranjo simples e combinação simples respectivamente. Esses dados revelam que os problemas que envolvem a repetição dos elementos são tidos como os mais difíceis de identificar a partir do enunciado da situação, indicando que a maioria desses estudantes não observam as relações e as propriedades no enunciado das situações problemas, ou seja, o invariante relacional de problemas combinatórios com repetição de elementos é mais difícil do que aqueles da ordenação.

Com base nas justificativas apresentadas pelos estudantes nessas atividades foi possível ainda categorizar as suas respostas em seis categorias, apresentadas no gráfico 1, a saber, **J0**: Não apresenta justificativa; **J1**: Não apresenta nenhuma relação com a combinatória nem o enunciado; **J2**: Apenas repete o enunciado da questão; **J3**: Justifica utilizando propriedades incorretas; **J4**: Justifica com alguma propriedade combinatória; **J5**: Apresenta todas as propriedades dos tipos de problema combinatório.

Diante do resultado da Figura 10 constatou-se que o problema de arranjo com repetição foi o que obteve a maioria das justificativas dos estudantes por meio da J3, indicando que estes justificaram essa situação com propriedades de outros problemas combinatórios.

Figura 10 – Análise das justificativas apresentadas nas questões de múltipla escolha



Fonte: Araújo (2017).

Observa-se que são poucos os estudantes que conseguiram justificar corretamente todas as propriedades combinatórias nestes problemas, assim como a que envolveu a combinação simples foi o que teve um resultado melhor ao compará-lo aos outros problemas. Portanto, revelou-se que a maioria dos estudantes tem dificuldades ao justificar esses problemas, isto é, aos invariantes da repetição, da ordem e da escolha dos elementos. Nota-se ainda que os problemas de arranjo, combinação com repetição e combinação apresenta maior frequência de justificativas na J4, que representa um nível parcial de explicitação dos invariantes prescritivos.

Na Figura 11, observa-se a identificação errônea do tipo de

verificou-se que alguns estudantes não participaram de todos os momentos durante a intervenção. Bem como, pesquisas que busquem analisar como o professor leciona este conteúdo e quais conhecimentos eles têm sobre Combinatória.

Referências

- ARAÚJO, K.L.S. *Problemas de arranjo e combinação: uma intervenção a partir dos invariantes prescritivos de ordem e repetição de combinatória de ensino médio*. Caruaru: UFPE, 2017.
- BARRETO, F.L.S. *O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos*. Recife: Universidade Federal do Pernambuco, 2012.
- BRASIL. PCN+ *Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.
- BORBA, R. Combinando na vida e na escola: limites e possibilidades. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2016, São Paulo. *Anais...* São Paulo: ENEM, 2016.
- BORBA, R. et al. A formação de professores de anos iniciais do Ensino Fundamental para o ensino da Combinatória. *Rev. Paranaense Educ. Matem.*, v.3, n.4, p.15-137, 2014.
- CONCEIÇÃO, D.; PEREIRA, D.; SANTOS, M. O ensino-aprendizagem de Análise Combinatória: o desempenho de alunos de Belém do Pará. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2016, São Paulo. *Anais...* São Paulo: ENEM, 2016.
- DIAS, R.; FREITAS, A.; VICTER, E. Noções de Análise Combinatória na Educação Básica: atividades interdisciplinares. *Educ. Matem. Debate*, v.1, n.3, p.296-313, 2017.
- FERNANDES, J.; CORREIA, P.; ROA GUZMÁN, R. Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino. *Rev. Latinoam. Investig. Matem. Educ.*. Relime, v.13, n.2, p.215-242, 2010.
- HOLANDA, D. Conhecimento docente de Combinatória e aluno: um caso no interior de Pernambuco. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20, 2016, Curitiba. *Anais...* Curitiba: EBRAPEM, 2016.
- JOHNSON, J. Using dominoes to introduce combinatorial reasoning. In: KENNEY, M. J.; HIRSCH, C.R. *Discrete Mathematics across the curriculum, k-12*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1991. p.128-136
- MAGINA, S. et al. *Representando adição e subtração: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais* São Paulo: PROEM, 2008.
- OLIVEIRA, M.M. *Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.
- PESSOA, C.; BORBA, R. Resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos do 6º ao 9º ano. João Pessoa: EPENN, 2009.
- PESSOA, C. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20, 2010, Salvador. *Anais...* Salvador: ENEM, 2010.
- PESSOA, C.; SANTOS, L. Listagem, invariantes, sistematização e generalização: um caminho para o ensino de combinatória em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2012. Fortaleza. *Anais...* Fortaleza: SBEM, 2012.
- ROA, R. *Razonamiento Combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Granada: Universidade de Granada, Granada, 2000
- ROCHA, C.A. *Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos*. 2011. Disponível em http://repositorio.ufpe.br:8080/bitstream/handle/123456789/3774/arquivo2888_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acessado em: 29 Dez 2017.
- ROCHA, C.A.; FERRAZ, M.C. Conhecimentos de Professores que ensinam Matemática sobre Problemas de Arranjo e Combinação. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. Recife. *Anais...* Recife: CIAEM, 2011.
- SANTOS, J.P.O.; MELLO, M.P.; MURARI, I.T.C. *Introdução a Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Moderna, 2007.
- SILVA, J.J.; ROCHA, C.A. O Invariante da repetição nos problemas combinatórios em livros didáticos do Ensino Fundamental. In: ENCONTRO DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA DA UEPB, 5; ENCONTRO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA, 3, 2015, Campina Grande. *Anais ...* Campina Grande: UEPB, 2015. p. 1-12.
- SILVA, M.C. *A combinatória: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e livros didáticos do ensino fundamental*. 2016. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE: Recife, 2016.
- VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Curitiba: UFPR, 2009.
- VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, p.75-90, 1986.