

Um Estudo Exploratório sobre a Noção Intuitiva do Volume da Esfera

An Exploratory Study about the Sphere Intuitive Notion Volume

Greyce Contini Pilati^a; Rodrigo Martins^{b*}; Lilian Akemi Kato^b

^aEducação Básica em Colégio Estadual Marechal Costa e Silva – Ensino Fundamental e Médio. PR, Brasil.

^bUniversidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-graduação *Stricto Sensu* em Educação para a Ciência e Matemática; e Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ciências Ambientais. PR, Brasil.

*E-mail: rmartins@uem.br.

Recebido em: 28/06/2016; Aceito em: 26/11/2016

Resumo

Neste artigo se propõe uma discussão sobre algumas das diferentes possibilidades para estimar o volume de uma esfera, objetivando apontar relações significativas, para os estudantes, entre o conceito e a fórmula conhecida. Para tanto, inicia-se fazendo um levantamento das diferentes formas como o conceito de volume é tratado nos livros didáticos, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, aprovados nas últimas avaliações do PNLN, o que revelou a importância das noções intuitivas de comparação de grandezas como mecanismo para a obtenção da estimativa do volume da esfera. Nesse contexto, assumindo o processo de comparação como a intuição primeira para o cálculo do volume, apresentam-se algumas aproximações para o volume da esfera, tomando como referência os prismas de base quadrada e retangular, os cilindros e os sólidos de Platão. Buscando uma melhor aproximação para este cálculo, propõe-se o método da deformação da esfera para obtenção de seu volume e utilizou-se o Princípio de Cavalieri, que é um dos métodos mais abordados no Ensino Médio para esse fim. Este estudo aponta a ruptura existente no desenvolvimento intuitivo da noção de volume apresentada no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, quando a fórmula do volume da esfera é apresentada formalmente, indicando possibilidades para o ensino desse conteúdo na Educação Básica.

Palavras-chave: Volume da Esfera. Noções Intuitivas. Livros Didáticos.

Abstract

In this article a discussion on some of the different possibilities to estimate the sphere volume is proposed, aiming at finding meaningful relations, for students, between the concept and the known formula. Therefore we started doing a survey of the different ways in which the concept of volume is treated in elementary school and high school textbooks, approved in the last assessments PNLN, which revealed the importance of intuitive notions of magnitudes comparison as a mechanism to obtain the estimated sphere volume. In this context, assuming the matching process as the first intuition for calculating the volume, we present some approaches to the sphere volume, with reference to the prisms of square and rectangular base, the cylinders and the solids of Plato. Seeking a better approach to this calculation, we propose the sphere deformation method to obtain its volume and use the Principle of Cavalieri, which is one of the methods discussed in high school for this purpose. This study points to the existing rupture in the intuitive development of the notion of volume presented in elementary school and in high school, when the sphere volume formula is formally presented, indicating possibilities for teaching that content in Basic Education.

Keywords: Sphere Volume. Intuitive Notions. Didactic Books.

1 Introdução

O processo de “medir” é utilizado desde a antiguidade, há vestígios, por exemplo, de noções de medida realizados pelo homem e registrados em desenhos e figuras da era neolítica. Heródoto atribuiu a origem da Geometria à necessidade dos homens em realizar as divisões das terras férteis, após a inundação dos vales dos rios no Egito, enquanto que Aristóteles ligava-a diretamente ao lazer sacerdotal (BOYER, 1974).

Neste texto, assume-se o processo de “medir” como um procedimento de comparação, que corresponde com algumas formas como os povos antigos realizavam tal procedimento.

A necessidade de semear grãos e comercializá-los, por exemplo, provocou a necessidade da padronização de unidades de medida, então, uma das referências adotadas passou a ser partes do corpo (a braça, que é a distância de uma palma da mão à outra de braços abertos, o cúbito, que a distância

da ponta do dedo ao cotovelo, a jarda que é a distância do nariz à ponta do dedo do braço estendido, entre outras). O desenvolvimento das civilizações aliado à intensificação do comércio fortaleceu o estabelecimento de algumas dessas unidades de comprimento padrão como a polegada, o pé e a jarda na Inglaterra e o cúbito, no Egito. Inevitavelmente, devido às diferenças corporais dos povos houve negociações injustas, gerando conflitos entre os povos. Era necessária então a adoção de uma medida padrão, que facilitasse o comércio entre povos distantes sem injustiças. Na França, houve a iniciativa de um grupo de cientistas em desenvolver um sistema métrico que passou a ser difundido mundialmente (POZEBON; LOPES, 2013).

Desde junho de 1799 encontra-se na França um protótipo de platina que representa o padrão de metro (m), que hoje em dia, esta sob a guarda do Escritório Internacional de Pesos e Medidas (*Bureau International des Poids et Mesures*). Este padrão de medida linear estabelece o comprimento

linear das coisas, isto é, para saber quantos metros¹ tem uma corda, por exemplo, verifica-se a quantas unidades do metro padrão corresponde o comprimento da corda. Da mesma forma, tem-se a medida de porções delimitadas do plano, para tanto se verifica quantos metros tem em cada direção ortogonal do plano (comprimento e largura) originando o novo padrão bidimensional metro quadrado (m^2), e com isso, pode-se responder a pergunta: quantos metros quadrados (ou subdivisões desta unidade) correspondem a área da porção do plano que se quer medir?

Para certas porções do plano, como uma circunferência, por exemplo, a utilização deste padrão de medida não é muito simples. Assim, surgem ao menos três caminhos, para resolver esse problema: a aproximação, quando se tenta aproximar polígonos regulares inscritos, por exemplo; a deformação, como no problema da quadratura do círculo e a comparação como no Princípio de Cavalieri.

Neste contexto, a noção intuitiva de volume surge com base no mesmo raciocínio de comparação da medida de objetos tridimensionais, na prática tem-se a comparação do volume de objetos desconhecidos com o volume de objetos conhecidos.

As crianças, por exemplo, tentam encaixar peças em caixas maiores, verificando experimentalmente se estas cabem ou não no recipiente escolhido, ou ainda quantas dessas peças são necessárias para encher a caixa. Segundo Gravina e Silva (2008), uma pessoa pode tentar a possibilidade de calcular o volume de uma esfera comparando-a com um cubo unitário, estratégia que funcionaria perfeitamente com um paralelepípedo reto ou um cubo, entretanto com um corpo redondo poderia trazer algumas dificuldades.

Para Lula (2013, p.17-18), esta ideia intuitiva para o cálculo do volume é descartada quando se refere a objetos arredondados como a esfera: “é claro que, se o sólido tiver um formato irregular, não poderemos pensar somente na quantidade de vezes que um cubo unitário cabe dentro do sólido”.

Uma observação crítica dessas afirmações leva ao seguinte questionamento: por que não se pode pensar na comparação de cubos como padrão para calcular o volume da esfera? Poderia haver um método que facilitasse a dedução da fórmula de seu volume, que não fosse a que utiliza o Princípio de Cavalieri que poderia surgir por meio do aprofundamento dessas noções intuitivas?

De acordo com Ávila (2010), baseado em noções de comparação Arquimedes calculou o volume da esfera, usando a Lei da Alavanca e o equilíbrio de “pesos”. Esse método se assemelha muito ao Princípio de Cavalieri, que é a abordagem mais utilizada pelos autores dos livros didáticos para a dedução do volume da esfera.

Assumindo o processo de comparação como a intuição

primeira para o cálculo do volume, neste artigo apresentam-se algumas aproximações para o volume da esfera, utilizando prismas de base quadrada, prismas de base retangular, cilindros, comparação do volume da esfera com o volume dos sólidos platônicos e sua deformação em um cubo de mesmo volume, buscando apontar possibilidades para o ensino desse conteúdo na Educação Básica.

Nesse sentido, objetiva-se, neste artigo, apresentar possibilidades diferentes, em relação àquelas propostas nos livros didáticos, para o estudo do volume da esfera que proporcionem a compreensão da sua fórmula usual do cálculo, a partir dos significados dos parâmetros obtidos com as noções intuitivas iniciais de volume que são apresentadas, ao estudante, durante o processo de aprendizagem da Matemática.

2 Desenvolvimento

2.1 Metodologia

Para iniciar a pesquisa procura-se fazer um pequeno resgate histórico da necessidade do homem em “medir”, estabelecendo comparações entre objetos conhecidos e desconhecidos. Busca-se também a relação da construção do conhecimento provocada entre as noções intuitivas e o ensino da Matemática nos textos: Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: visualização (COSTA, 2002); Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity (TALL; VINNER, 1981); Formalização e intuição no contexto do conhecimento, do ensino e da atuação social (SOARES, 1995) e O intuitivo e o lógico no conhecimento matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática (MENEGETTI, 2009), que ofereceram o respaldo teórico quanto ao uso da intuição como ferramenta de construção do processo de aprendizagem. Além disso, procura-se o que os documentos que regem a Educação Básica - PCN e as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná - DCE de Matemática destacavam a respeito do ensino de geometria e de volume.

Com base teórica das noções intuitivas relacionadas à Matemática procura-se entender como o ensino do volume dos prismas era iniciado na escola. Para tanto, pesquisa-se em todos os livros didáticos indicados no último Programa Nacional do Livro Didático - PNLD do Ensino Fundamental – séries iniciais (2016), em específico nos livros didáticos do 5º ano, como estes abordavam o estudo do volume dos sólidos geométricos. Continua-se o estudo com a análise dos livros do 6º ano do PNLD (2014) referente aos anos finais do Ensino Fundamental para verificar como os mesmos complementavam e aprofundavam as abordagens do volume

¹ Fala-se em metro como exemplo de unidade de medida, sendo que, qualquer outra unidade padrão de medida linear poderia ser utilizada neste contexto.

dos sólidos geométricos estudados na etapa anterior. Na sequência, pesquisou-se em todos os livros didáticos indicados no último PNLD do Ensino Médio (2015) de como era abordado o conteúdo volume da esfera nos capítulos de Geometria Espacial.

Em seguida, com base nos estudos de PILATI (2015) apontam-se relações entre as noções intuitivas e a obtenção do volume da esfera, as dificuldades e as facilidades de cada método, visando apresentar abordagens distintas daquelas apresentadas nos livros didáticos e valorizar o resgate do conhecimento prévio dos alunos mesmo em níveis mais aprofundados como no Ensino Médio para o cálculo do volume da esfera.

2.2 A noção intuitiva de conceitos (na Matemática)

Intuição de acordo com o dicionário significa um conhecimento imediato, uma percepção natural, ou seja, por instinto.

Vários dos conceitos que são usados não são formalmente definidos e são aprendidos a serem reconhecidos pela experiência e a utilizá-los em contextos apropriados. Mais tarde, esses conceitos podem ser aprimorados, à medida que o indivíduo amadurece. Crianças usam diferentes processos para a definição de conceitos intuitivos, sem caráter formal, e isso depende muito do contexto em que estão inseridas, sofrendo alterações de tempos em tempos. Essa definição intuitiva pode ter significado coerente ou não, isso dependerá das experiências pessoais e da criatividade individual. (TALL; VINNER, 1991).

Em seus estudos, Costa (2002) aborda como o aluno constrói o pensamento geométrico por meio da abstração, das transformações e previsões mentais e que estes estimulam a produção de um pensamento matemático complexo:

Muitos dos processos mentais da Matemática avançada estão já presentes no pensamento das crianças sobre conceitos elementares da Matemática, por exemplo no número e valor de posição. Os processos mentais não são exclusivamente usados em Matemática avançada nem são exclusivamente usados na Matemática. Abstracções são feitas em física, representações são usadas em psicologia, análises são usadas em economia e visualização em arte (COSTA, 2002. p.262).

Muitos dos conhecimentos matemáticos tiveram suas pesquisas e demonstrações iniciadas por pensamentos intuitivos, que estimulavam buscas incessantes para obter resultados afirmativos ou não às hipóteses iniciais.

Confirmando a importância do pensamento intuitivo em Matemática, Soares (1995, p.2) destaca que:

É possível dizer que as ideias intuitivas formam a etapa inicial do raciocínio. Nesse sentido, devem ser valorizadas. No entanto, é fundamental estar atento para o fato de que, numa primeira etapa, as ideias intuitivas devem ser submetidas ao processo de formalização, que é o caminho para se decidir sobre o grau de veracidade da intuição, dentro do contexto em que ela é considerada. Ou seja, é fundamental estabelecer e formular, juntamente com os princípios próprios da teoria à qual a intuição fornece de algum modo a matéria

inicial, os princípios formais pelos quais será explorado esse fornecimento inicial.

Corroborando com a mesma ideia, Meneghetti (2009) destaca que tanto a lógica quanto a intuição são importantes e necessárias para a evolução do conhecimento matemático, vertente também defendida pelo atual movimento na Filosofia da Matemática:

Defendemos que no processo de constituição do conhecimento matemático, não é possível atribuir maior valor ao aspecto intuitivo ou ao lógico, ou mesmo concebê-los como excludentes e que o intuitivo apoia-se no lógico e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados, num processo gradual e dinâmico, em forma de espiral. Entendemos que o equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo deve estar presente em cada um dos níveis e que, nesses últimos, o caráter intuitivo e o lógico estão suscetíveis a mudanças, por exemplo, o que é lógico num nível pode passar a ser intuitivo num outro (MENEGETTI, 2009, p.8).

Nesse contexto, neste trabalho, assume-se que a intuição é um dos primeiros passos pelos quais o indivíduo desenvolve sua percepção de mundo e suas definições, que são confirmadas ou refutadas à medida que este interage com o mundo que o cerca. Além disso, para a Matemática a intuição tem sido uma aliada, pois instiga os indivíduos a confirmarem ou refutarem hipóteses intuitivas ao longo dos séculos, proporcionando uma formalização e o desenvolvimento rigoroso de conhecimentos e teorias importantes para o avanço da sociedade como um todo.

Pauta-se nessas considerações, sobre a intuição, para apresentar uma discussão sobre algumas das diferentes possibilidades para estimar o volume de uma esfera, buscando apontar relações significativas, para os estudantes, entre o conceito e a fórmula.

Na seção seguinte, apresenta-se uma análise de livros didáticos, indicando como os autores abordam o conceito de volume no Ensino Fundamental e, posteriormente, o volume da esfera no Ensino Médio.

2.3 O conceito de volume nos livros didáticos da Educação Básica

O conceito de volume é abordado em livros didáticos desde as séries iniciais até o Ensino Médio. A noção intuitiva desse conteúdo é instigada durante o processo de escolarização.

A fim de se analisar a abordagem do conteúdo volume nos livros didáticos pesquisou-se em todas as obras aprovadas para a escolha de livros didáticos do PNLD 2016 (Ensino Fundamental nas séries iniciais), PNLD 2014 (Ensino Fundamental nas séries finais) e PNLD de 2015 (Ensino Médio) para se compreender melhor como a construção desse conceito é desenvolvida por vários autores, a fim de se verificar como ocorre a construção do conceito de volume do ponto de vista dos autores de livros didáticos.

De acordo com o PCN para as séries iniciais do Ensino Fundamental de Matemática, não fica explícito a exigência do desenvolvimento da grandeza volume, pois se tem entre os

conteúdos conceituais e procedimentais os seguintes itens:

Identificação de grandezas mensuráveis no contexto diário: comprimento, massa, capacidade, superfície, etc.
Reconhecimento e utilização de unidades usuais de medida como metro, centímetro, quilômetro, grama, miligrama, quilograma, litro, mililitro, metro quadrado, alqueire, etc. (BRASIL, 1997, p.61).

Entretanto, subentende-se que o volume também é uma grandeza mensurável no cotidiano de uma criança e importante de ser explorada nessa fase de ensino. Ainda, segundo o mesmo documento, um dos objetivos gerais de Matemática

do Ensino Fundamental é:

Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis (BRASIL, 1997, p.33, grifo nosso).

Investiga-se como o conceito de volume é abordado nos 17 livros didáticos do 5º ano aprovados no PNLD 2016, para verificar como os conceitos intuitivos desse conteúdo são abordados nessa modalidade de ensino.

Quadro 1: Livros de 5º ano do Ensino Fundamental do PNLD 2016

Livro	Autor	Editora	Legenda
Porta Aberta: Matemática – Edição Renovada	Marília Ramos Centurión, Junia La Scala e Arnaldo Rodrigues.	FTD	L ₁
A Conquista da Matemática.	José Ruy Giovanni Jr.	FTD	L ₂
Projeto Jimbolê - Matemática	Adilson Longen	Editadora do Brasil	L ₃
Projeto Coopera: Matemática.	Eliane Reame e Priscila Montenegro	Saraiva	L ₄
Novo Bem-me-quer: Matemática	Ana Lúcia Bordeaux, Cléa Rubinstein, Elizabeth França, Elizabeth Ogliari e Vânia Miguel	Editadora do Brasil	L ₅
Projeto Buriti: Matemática.	Obra coletiva.	Moderna	L ₆
Pequenos Exploradores: Matemática	Carla Cristina Tosatto, Cláudia Miriam Tosatto e Edilaine do P. F. Peracchi	Editadora Positivo	L ₇
Projeto Navegar: Matemática	Ênio Silveira	Moderna	L ₈
Aprender Juntos Matemática	Roberta Taboada e Ângela Leite	SM	L ₉
Mundo Amigo – Matemática	Obra Coletiva.	SM	L ₁₀
Fazer, Compreender e Criar em Matemática	Aida Ferreira da Silva Munhoz, Helenalda Nazareth e Marília Toletto	IBEP	L ₁₁
A Escola é Nossa: Matemática.	Fábio Vieira, Jackson Ribeiro e Karina Pessoa	Scipione	L ₁₂
Aprender, Muito Prazer! Matemática	Jacqueline Garcia	Base Editorial	L ₁₃
Ápis: Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	L ₁₄
Matemática do Cotidiano	Antônio José Lopes e Joaquin Gimenez Rodrigues	Scipione	L ₁₅
Nosso Livro de Matemática	Célia Maria C. Pires e Ivan Cruz Rodrigues	Zapt	L ₁₆
Saber Matemática – Edição Renovada	Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz e Vladimir Marim	FTD	L ₁₇

Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se constatar que quatro dos livros analisados (L₃, L₄, L₁₆ e L₁₇) não apresentam o conteúdo volume especificadamente. Os livros L₄ e L₁₆ destacam somente noções de capacidade e de unidades como litro e mililitro. O livro L₁₇ apresenta além das noções de capacidade a relação da capacidade de um litro e um cubo de aresta 10 centímetros e de 1 milímetro com um cubo de aresta 1 centímetro, mas sem citar a palavra volume. O L₃ não faz referência ao conteúdo.

Os livros L₁, L₂, L₆, L₇, L₈, L₉, L₁₀, L₁₂, L₁₅ iniciam o conteúdo volume a partir da contagem de pilhas compostas por cubos ou paralelepípedos, desenvolvendo noções intuitivas de contagem para verificação dessa grandeza. L₁₄ dá um exemplo de um empilhamento com peças de dominó e ressalta que o volume da caixa corresponde ao volume das 28 peças, considerando-a como unidade. Já L₁₃ ilustra o encaixe de blocos em uma caixa transparente relacionando seu volume

à quantidade de cubos, que foram encaixados nela. Enquanto L₁ usa o material dourado como referência para o cálculo de empilhamentos, material manipulado pelas crianças formado por cubinhos.

O livro L₁₂ sinaliza sobre a importância de se estabelecer uma unidade padrão para medir o volume de objetos para que não haja diferenças de comparação entre objetos de tamanhos diferentes.

L₂ destaca que todo objeto ocupa lugar no espaço e que esse espaço ocupado pelo objeto chama-se volume. L₅ também traz essa definição de volume, porém toma como objeto uma caixa.

Nove desses livros (L₁, L₂, L₅, L₆, L₈, L₉, L₁₀, L₁₃ e L₁₄) estabelecem o centímetro cúbico como unidade padrão e propõem exercícios a respeito, sem preocupar-se em explicar o porquê da escolha dessa unidade de medida, o que torna os

exercícios mecânicos sem um aporte para a noção intuitiva do estudante. L_{11} relaciona o cubo de 10 cm de aresta com volume de 1 dm^3 a sua capacidade de 1 litro, solicitando que os alunos comprovem essa relação com uma experiência, atividade esta também solicitada por L_1 . Esta experiência reporta aos alunos a possibilidade de conhecerem as relações entre as medidas de volume e as medidas de capacidade.

L_1 , L_2 , L_7 , L_{12} , L_{13} , L_{14} generalizam o cálculo do volume de paralelepípedos como a multiplicação das medidas das três dimensões (comprimento, largura e altura). L_2 trata da multiplicação das camadas de uma pilha pela quantidade de cubos em cada camada para o cálculo de seu volume. L_{15} ilustra um exemplo do volume de um cubo com o produto de suas dimensões, mas não o generaliza. Em L_{13} há a ilustração de uma experiência para calcular o volume de um objeto por meio da quantidade de líquido deslocado, quando esse objeto é imerso em um recipiente totalmente cheio, experiência baseada na lenda de que Arquimedes mergulhou uma barra de um quilo de ouro em um recipiente repleto de água e comparou a quantidade de líquido deslocada em relação ao da coroa do rei Hieron para verificar se a coroa havia sido feita somente com ouro (VITRUVIUS, 1969, apud Martins, 2000, p.117-118).

Em L_5 , L_9 e L_{14} os alunos são instigados a explicar o significado do metro cúbico a partir do centímetro cúbico. Os livros L_6 , L_8 , L_9 , L_{10} , L_{13} definem metro cúbico como unidade

de medida que corresponde ao espaço ocupado por um cubo de aresta 1 metro. L_1 , L_6 , L_9 , L_{11} , L_{13} , L_{14} e L_{17} relacionam o volume com as medidas de capacidade.

Na sequência, apresentar-se-á uma análise dos livros didáticos aprovados no PNLD 2014 do 6º ano, pois as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCEs) destacam que o conteúdo volume deve ser desenvolvido no Ensino Fundamental, com o cálculo do volume de prismas retangulares, especificamente, o paralelepípedo e o cubo e de prismas triangulares, tendo como base triângulos retângulo, incluindo ainda conversões (PARANÁ, 2008, p.56). No mesmo documento, especifica que no 6º ano do Ensino Fundamental o aluno deve compreender e utilizar o metro cúbico como unidade padrão para medida de volume (p.77).

Em âmbito nacional, para o Ensino Fundamental – séries finais, os PCNs destacam com clareza que o desenvolvimento do conteúdo volume deve ser apresentado já nas duas primeiras séries do terceiro ciclo (6º e 7º anos), esperando-se que o aluno seja capaz de efetuar o:

Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria [e ainda] Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior (BRASIL, 1998, p.73-74).

Quadro 2: Livros de 6º ano do Ensino Fundamental do PNLD 2014

Livro	Autor	Editora	Legenda
Vontade de Saber Matemática	Joamir Roberto de Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro	FTD	L_{18}
Projeto Araribá – Matemática	Obra coletiva.	Moderna	L_{19}
Matemática: Teoria e Contexto	Marília Centurión e José Jakubovic	Saraiva	L_{20}
Descobrimos e Aplicando a Matemática	Alceu dos Santos Mazziero e Paulo Antônio Fonseca Machado	Dimensão	L_{21}
Praticando Matemática – Edição Renovada	Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos	Editores do Brasil	L_{22}
Matemática: Ideias e Desafios	Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga.	Saraiva	L_{23}
Matemática	Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis	Moderna	L_{24}
Projeto Teláris: Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	L_{25}
Matemática	Edwaldo Bianchini	Moderna	L_{26}
Projeto Velear: Matemática	Antonio José Lopes	Scipione	L_{27}

Fonte: Dados da pesquisa.

Dos livros do 6º ano analisados, L_{18} , L_{24} e L_{27} não trazem o conceito de volume.

Os livros L_{19} , L_{20} , L_{22} , L_{25} e L_{26} definem volume de um objeto como a medida do espaço que ele ocupa. L_{26} ainda destaca que esse corpo pode ser sólido, líquido ou gasoso. Os livros L_{21} , L_{23} e L_{26} apresentam diversas pilhas formadas por cubos e propõe a ideia de contar quantos cubos cabem nelas, estabelecendo uma relação entre as dimensões do objeto e o volume das pilhas. L_{26} solicita, ainda, o cálculo de pilhas tomando prismas de base hexagonal como unidade. O L_{25} ressalta a importância da escolha de uma unidade conveniente

para comparação de volume, citando que “cubos são bons, esferas não”, porém não entra em maiores detalhes e adota o cubo como unidade padrão. L_{22} também trabalha com a ideia de preencher o volume com cubinhos e depois contá-los, mas destaca que esse não é um processo prático.

Os livros L_{19} , L_{20} , L_{21} e L_{22} usam o cubo como unidade padrão de medida de volume sem associá-lo a uma unidade cúbica específica.

L_{25} define um centímetro cúbico. L_{23} e L_{26} definem e adotam o metro cúbico como unidade padrão de volume de acordo com a medida que é utilizada pelo Sistema Internacional de

Unidades (SIU).

Os livros L_{20} , L_{22} , L_{23} , L_{25} , L_{26} destacam que o volume de um paralelepípedo pode ser calculado por meio do produto de suas três dimensões: comprimento, largura e altura. Ainda o volume do cubo é abordado por L_{23} , L_{25} , L_{26} . Em L_{25} há a apresentação de fórmulas para o cálculo desses volumes.

L_{19} , L_{23} e L_{26} apresentam as medidas de volume com múltiplos e submúltiplos do metro cúbico, sendo que o último apresenta, em tamanho real, os desenhos de 1 dm^3 , 1 cm^3 e 1 mm^3 .

Os volumes L_{19} , L_{20} , L_{22} , L_{23} , L_{25} e L_{26} relacionam medidas de volume com medidas de capacidade. L_{22} propõe a comparação entre o volume de um decímetro cúbico e o volume de um litro em uma experiência.

Em sua maioria, os livros do 6º ano que tratam de volume tem o cubo como unidade padrão. Além disso, pretendem estabelecer uma relação intuitiva do cálculo do volume de

pilhas e paralelepípedos antes de apresentá-la como o produto das dimensões comprimento, largura e altura.

Para o Ensino Médio, as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná destacam que:

É necessário conhecer as demonstrações das fórmulas, teoremas, conhecer e aplicar as regras e convenções matemáticas, tanto no estudo da geometria de posição como no cálculo de área de figuras geométricas planas e espaciais e de volume de sólidos geométricos, em especial de prismas, pirâmides (tetraedro), cilindro, cone e esfera (PARANÁ, 2008, p.56).

Porém, o mesmo documento não especifica em qual ano esses conteúdos devem ser abordados, apenas indica que nessa modalidade de ensino o aluno deve ampliar e aprofundar os conhecimentos de volume adquiridos no Ensino Fundamental.

Assim, verificou-se como as coleções do Ensino Médio aprovadas no PNLD 2015, apresentam o conteúdo volume da esfera.

Quadro 3: Livros do Ensino Médio do PNLD 2015

Livro	Autor	Editora	Legenda
Conexões com a Matemática	Obra coletiva.	Moderna	L_{28}
Matemática Ensino Médio	Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz	Saraiva	L_{29}
Novo Olhar – Matemática	Joamir Roberto de Souza	FTD	L_{30}
Matemática: Contexto e Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática	L_{31}
Matemática: Ciência e Aplicações	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périco e Nilze de Almeida	Saraiva	L_{32}
Matemática	Manoel Paiva	Moderna	L_{33}

Fonte: Dados da pesquisa.

Sobre a abordagem do conteúdo volume da esfera nas coleções do Ensino Médio pode-se constatar que cinco delas apresentam o conteúdo no exemplar referente ao segundo ano do Ensino Médio e somente a coleção L_{30} apresenta o conteúdo no livro do 3º ano.

O L_{28} apenas apresenta a fórmula do volume da esfera, sem nenhuma demonstração. Já no L_{29} o autor destaca que Arquimedes provou que o volume da esfera é igual a quatro vezes o volume de um cone reto de base igual ao círculo máximo da esfera e de altura de medida igual ao seu raio r . Ressalta que, com isso, Arquimedes percebeu que o volume de dois cones correspondia ao volume de uma semiesfera e que demonstrou essa relação por dedução. Este livro também apenas apresenta a fórmula do volume da esfera sem maiores explicações.

As quatro últimas obras (L_{30} , L_{31} , L_{32} e L_{33}) abordam a dedução da fórmula do volume da esfera por meio do Princípio de Cavalieri, com a secção de uma esfera de raio r e um cilindro de altura $2r$ e raio da base de medida r retirados dois cones equiláteros de base r . O livro L_{33} explica, inicialmente, como obter esse sólido e o nomeia de anticlépsidra, calculando seu volume para depois compará-lo ao volume da esfera.

As demonstrações são bem detalhadas e ilustradas possibilitando a comparação entre as “fatias” da esfera e as “fatias” do cilindro, após a retirada dos dois cones equiláteros

de raio da base r .

Esta análise permitiu concluir que nos livros do Ensino Fundamental o conteúdo volume é abordado de maneira comparativa, tomando uma unidade padrão, em sua grande maioria o cubo, e que por meio de empilhamentos é estendido ao cálculo do volume de paralelepípedos e cubos através do produto de suas dimensões.

No Ensino Médio, os livros que trazem a demonstração das fórmulas dos sólidos geométricos, em especial a esfera, centram-se no Princípio de Cavalieri como recurso para tal prova, abandonando as noções intuitivas de comparação com o cubo e ou empilhamentos de unidades de volume conhecidas.

A partir da análise de como o conteúdo volume é abordado nos livros didáticos passa-se a questionar: será que não existe uma maneira de calcular o volume da esfera comparando-a a objetos de volume já conhecidos, como o cubo, por exemplo, mantendo o raciocínio intuitivo de comparação, tão bem explorado no Ensino Fundamental? Haveria uma razão lógica que justificasse a utilização do Princípio de Cavalieri no Ensino Médio para provar o volume da esfera em relação aos outros métodos comparativos?

Na próxima seção tenta-se responder a estes questionamentos a partir do estudo de vários métodos de cálculo do volume da esfera na tentativa de obter um resultado satisfatório e uma justificativa para as questões levantadas

anteriormente.

2.4 A construção da ideia intuitiva de volume: uma proposta

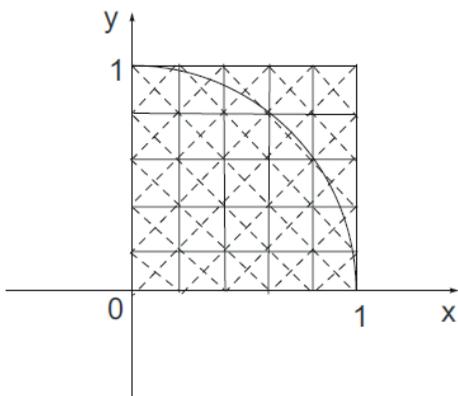
Ao pensar em como calcular o volume de um objeto é natural que se busque em intuição uma ou mais hipóteses para executar tal tarefa. Como visto anteriormente, a ideia inicial de volume abordada nos livros didáticos do Ensino Fundamental parte da comparação do volume do objeto desconhecido com um cubo de uma unidade padrão, que é conveniente.

O volume da esfera é um conteúdo abordado em livros do Ensino Médio, diferentemente do estudo dos volumes de paralelepípedos e cubos, que são desenvolvidos no Ensino Fundamental, dada a simplicidade que o cálculo desses objetos com a unidade padrão de volume: o cubo.

O que se percebe é que ao trabalhar o volume da esfera, há uma ruptura desse pensamento intuitivo de comparação com cubos, já que os livros analisados do Ensino Médio quando continham a demonstração da fórmula do volume da esfera a realizavam por meio do Princípio de Cavalieri. O desafio foi calcular o volume da esfera utilizando as ideias intuitivas de comparação entre sólidos de volumes e tentar compreender o porquê da escolha do Princípio de Cavalieri para o cálculo do volume da esfera nos livros didáticos do Ensino Médio.

Para iniciar os cálculos, escolheu-se preencher uma esfera de raio 1 com prismas de base quadrada. Para simplificar os cálculos, trabalhou-se apenas com a porção referente a um oitavo do seu volume total e, depois, multiplicou-se o resultado obtido por oito para resultar no volume da esfera completo. Dividiu-se o raio da esfera em cinco partes iguais que foram consideradas como lado do quadrado, base dos prismas. Além disso, só foram considerados os prismas, cujos centros da base quadrada estivessem dentro do setor circular, que formava a base do sólido tomado, conforme mostra a Figura 1.

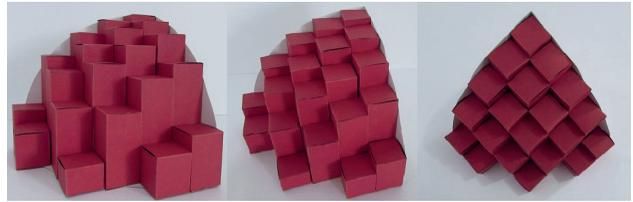
Figura 1: Base dos prismas de base quadrada.



Fonte: Pilati (2015, p.25).

Dos 25 paralelepípedos formados, foram considerados 20 deles. Para cada um foi calculada a altura relativa da esfera no ponto que representa o centro da base de cada um dos prismas realizada a somatória desses volumes.

Figura 2: Prismas de base quadrada



Fonte: Pilati (2015).

O volume aproximado de um oitavo da esfera de raio 1 por aproximação de prismas de base quadrada é 0,522255335... Multiplicando esse valor por oito obtém-se 4,178042686... o que representa 99,74% do volume exato de uma esfera de raio 1.

Ao aumentar a quantidade de prismas, tomando prismas cada vez menores se chega a generalização de que o volume da esfera de raio r é dado por:

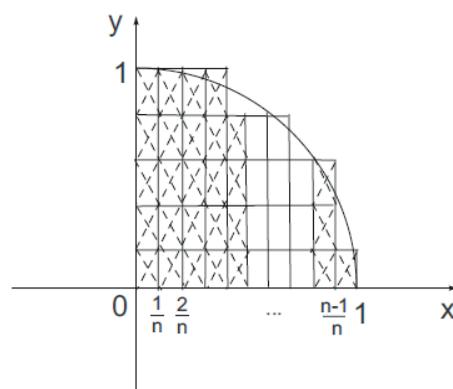
$$V_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4r^3}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{4n^2 - (2i-1)^2 - (2j-1)^2}$$

$$\text{com } 4n^2 > (2i-1)^2 - (2j-1)^2.$$

Na sequência, resolveu-se fazer a aproximação do volume da esfera com prismas de base retangular, um sólido cujo volume é abordado nos livros didáticos desde o Ensino Fundamental dos anos iniciais (5º ano).

Usou-se a mesma estratégia em calcular o volume de um oitavo da esfera com a intenção de condensar os cálculos. Também se escolheu dividir um dos raios da esfera em cinco partes e o outro em n partes, tendendo esse valor n para infinito, considerando-se assim, somente os prismas cujos centros das bases estavam contidos na circunferência máxima da esfera, conforme a figura 3.

Figura 3: Base dos prismas de base retangular



Fonte: Pilati (2015).

Realizando os cálculos, obteve-se a seguinte fórmula para o cálculo do volume da esfera:

$$V_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8r^3}{5n} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2i-1)^2}{4n^2} - \frac{1}{100}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2j-1)^2}{4n^2} - \frac{9}{100}} + \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2k-1)^2}{4n^2} - \frac{25}{100}} \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2l-1)^2}{4n^2} - \frac{49}{100}} + \sum_{m=1}^n \sqrt{1 - \frac{(2m-1)^2}{4n^2} - \frac{81}{100}} \right) \\ \text{Com } \frac{(2i-1)^2}{4n^2} \leq \frac{99}{100}, \frac{(2j-1)^2}{4n^2} \leq \frac{91}{100}, \frac{(2k-1)^2}{4n^2} \leq \frac{75}{100}, \frac{(2l-1)^2}{4n^2} \leq \frac{51}{100} \text{ e } \frac{(2m-1)^2}{4n^2} \leq \frac{19}{100}.$$

Um exemplo da utilização dessa fórmula para o cálculo da esfera está na Figura 4, na qual foi considerada paralelepípedos de base de dimensões e .

Figura 4: Representação de do volume da esfera com prismas retangulares para n=12.



Fonte: Pilati (2015).

Analisando os caminhos tomados percebe-se que o cálculo do volume da esfera utilizando prismas de base quadrada e prismas de base retangulares para obter aproximações do volume não são enfoques apropriados aos alunos do Ensino Médio devido à complexidade e dificuldade de generalização. Mesmo que os alunos tenham noções de somatórias e de limite esse caminho requer longo tempo de execução e não fornece uma fórmula simples.

Passou-se, então, a pensar em outro objeto, cujo volume já fosse conhecido por alunos do Ensino Médio que poderia ser intuitivamente comparado a esfera, os cilindros. Desta vez, dividiu-se metade da esfera em 10 cilindros, ou seja, cada um desses cilindros possuía uma altura de da esfera de raio 1, conforme ilustra a Figura 5.

Figura 5: Meia esfera confeccionada com 10 cilindros.



Fonte: Pilati (2015).

A base de cada cilindro é calculada a partir do ponto médio da altura de cada um dos cilindros. Após os cálculos do volume de cada cilindro e realizar as somas de seus volumes basta multiplicar o valor obtido por 2, que assim se chega ao seguinte resultado: que representa o volume de uma esfera de raio 1.

Ao generalizar, passando a considerar infinitos cilindros, obtém-se a seguinte fórmula para o volume da esfera:

$$V_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi r^3}{2n^3} \sum_{i=1}^n (4n^2 - (2i-1)^2) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

O que ocorre com o cálculo do volume da esfera por meio da aproximação de volumes com cilindros possibilita o cálculo exato de seu volume, quando generaliza-se a somatória para n cilindros. Porém, para isso, é necessário o auxílio de um software. Ainda, convém destacar que essa aproximação faz uso de somas infinitas e do conceito de limite, conteúdos que foram excluídos do conteúdo do nível médio desde a Reforma Capanema, em 1961.

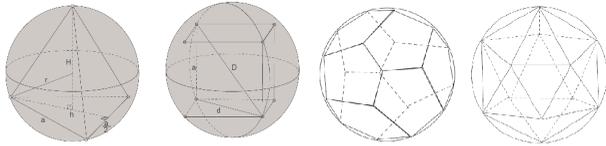
Ao fazer uma análise da aproximação do volume da esfera comparada aos volumes de outros sólidos, decidiu-se pela comparação do volume da esfera com o volume de um tetraedro, um cubo, um dodecaedro e um icosaedro, os sólidos platônicos, também estudados no Ensino Médio, inscritos em uma esfera de raio r.

Percebeu-se durante os estudos que o tetraedro não é um bom sólido para a aproximação do volume da esfera, pois tem volume igual a o que corresponde a 12,25% do volume da esfera.

O volume do cubo inscrito na esfera de raio r aumenta a aproximação em relação ao tetraedro, tendo seu volume dado por , mas ainda está distante de uma aproximação satisfatória representando 36,75% do volume da esfera.

O dodecaedro inscrito na esfera tem um volume que corresponde a 66,49% do volume da esfera, ou seja, uma aproximação bem melhor do que a do cubo, porém longe de uma considerada satisfatória para o cálculo da aproximação do volume de um sólido, representada por .

Os resultados da comparação dos volumes dos sólidos anteriores deram a noção intuitiva de que o icosaedro apresentaria uma aproximação do volume da esfera melhor do que a o dodecaedro. O volume do icosaedro em relação ao volume da esfera é representado por . Para surpresa, os cálculos mostraram que o volume do icosaedro representa 60,54% do volume da esfera, o que remete a conclusão de que um sólido regular não estabelece relação proporcional entre o aumento da quantidade de faces e o aumento de seu volume, quando inscritos em uma esfera.

Figura 6: Sólidos platônicos inscritos na esfera

Fonte: Adaptado de Pilati (2015).

A tentativa intuitiva de calcular o volume da esfera por meio da comparação com sólidos regulares não proporcionou bons resultados, pois não oferece boas aproximações do volume da esfera, entretanto, não deixa de ser curioso já que os alunos do Ensino Médio têm condições de calcular o volume desses sólidos platônicos. Podem ser tomados, ainda, outros sólidos irregulares para comparação como o icosaedro truncado, por exemplo, conhecido como um dos sólidos de Arquimedes, utilizado desde 1970, para a fabricação da bola de futebol (ALBINO, 2011), o que proporcionaria intuitivamente uma melhor aproximação do volume da esfera.

Outra forma de calcular o volume da esfera seria a deformação ou transformação dela em um prisma de base quadrada para posterior cálculo de seu volume. Para executá-la é necessário o estudo da quadratura do círculo. Tomou-se o círculo máximo da esfera. Ao rolar essa figura no papel obtém-se o comprimento dessa circunferência, então, foi construído um triângulo retângulo de altura r e base $2\pi r$. Com manipulações geométricas se obteve um quadrado de área πr^2 . Com esse quadrado como base se pode construir uma pirâmide de altura $4r$ e, em seguida, foi construído um prisma de mesma base da pirâmide com um terço de sua altura, com um volume igual ao de uma esfera de raio r , conforme a Figura 7.

Figura 7: Transformação da esfera em cubo

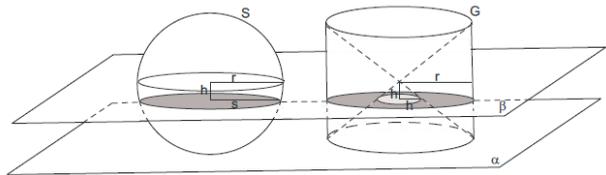
Fonte: Pilati (2015).

Essa maneira de cálculo do volume da esfera pode ser abordada, porém não é intuitiva que se cause a deformação do objeto que se deseja calcular o volume, quando se observam as noções de volume apresentadas nos livros do Ensino Fundamental, pois somente um deles aplica o modelo de Arquimedes que calcula o volume de um sólido por meio do deslocamento da água, quando este objeto é imerso em um recipiente repleto de água. Além disso, esse problema torna-se impossível de ser resolvido apenas com régua e compasso devido à incomensurabilidade de π .

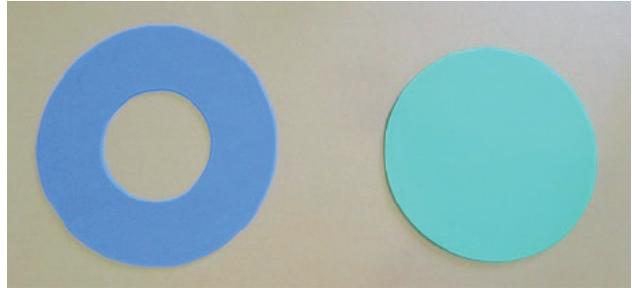
O volume da esfera pode ainda ser estudado a partir do Princípio de Cavalieri, que foi a abordagem mais utilizada nos livros de Ensino Médio pesquisados, em conformidade com a pesquisa de Gaspar (2005), que destaca esse como um dos métodos mais utilizados para o cálculo do volume da esfera.

Essa demonstração compara secções de uma esfera de

raio r com secções de um sólido S representado pela diferença entre os volumes de um cilindro de raio da base r e altura $2r$ e dois cones equiláteros de altura, conforme as Figuras 8 e 9.

Figura 8: Secção da esfera e do cilindro por um plano

Fonte: Pilati (2015).

Figura 9: Parte seccionada pelo plano e a esfera e entre o plano e o cilindro

Fonte: Pilati, (2015).

Na Figura 8 representam-se as secções da esfera S e do sólido G na qual se têm áreas iguais. Assim, com a decomposição do sólido G em fatias se conseguiu obter a esfera S de mesmo volume, chegando ao valor exato do volume da esfera S .

Para os alunos do Ensino Médio a demonstração utilizando o Princípio de Cavalieri é compreensível, porque de acordo com a sequência de estudos do volume dos sólidos dos corpos redondos o indivíduo já possui o domínio do cálculo do cilindro e do cone e também conhece como calcular a área de círculos, utilizada para comparar as áreas da coroa circular do sólido G e o círculo da esfera S , seccionados por um mesmo plano.

3 Conclusão

A análise dos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental possibilitou constatar que as noções intuitivas são utilizadas, quando o conceito de volume é abordado nessa etapa de ensino, valorizando a experiência que os alunos possuem quanto à comparação dos objetos.

Nos livros do 6º ano do Ensino Fundamental a ideia de comparação também é utilizada, conduzindo a formalização do cálculo do volume de cubos e paralelepípedos de maneira intuitiva, com a multiplicação de camadas de cubinhos para posteriormente uma formalização desse cálculo por meio do produto de suas dimensões.

Nos livros de Ensino Médio, o conteúdo volume da esfera é formalizado com a apresentação da fórmula ou por meio da dedução da mesma através do Princípio de Cavalieri que, justamente, reforça essa ideia intuitiva de volume, desenvolvida inicialmente pelas crianças, no entanto, não é

isso que é explorado nos livros didáticos, dando a sensação de ruptura com as noções de volume comparativas tão exploradas anteriormente.

Nos métodos de comparação intuitiva do volume da esfera, com diversos sólidos, ou não foi apresentada satisfatoriamente uma fórmula que generalizasse o cálculo da esfera ou os dados exigiam conteúdos que não são mais desenvolvidos no Ensino Médio ou, ainda, tornavam os cálculos muito extensos e trabalhosos dificultando a generalização.

O método que aborda o Princípio de Cavalieri para a demonstração do volume da esfera além de tratar de conceitos já estudados anteriormente e possibilitar a obtenção do volume exato da esfera reforça os conceitos de comparação entre objetos, noção intuitiva abordada desde as séries iniciais nos livros didáticos.

Entretanto, ainda continua-se com alguns questionamentos que sugerem futuros estudos: como os estudantes desenvolvem o conceito de volume da esfera durante a vida escolar? Será que eles continuam apresentando o raciocínio de comparação com volumes de objetos conhecidos como cubos e paralelepípedos ou mudam as estratégias de pensamento de acordo com o nível escolar em que se encontram? Utilizam os conceitos que aprenderam anteriormente?

Esses questionamentos necessitam, possivelmente, de uma investigação *in locus* o que não foi o propósito desta pesquisa, no entanto o estudo apresentado aponta que existe uma ruptura no desenvolvimento intuitivo da noção de volume apresentada no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, quando a fórmula do volume da esfera é apresentada formalmente. Tal ruptura justifica-se pela dificuldade em comparar o volume da esfera com o volume de sólidos conhecidos, como apresentado neste artigo.

Em tempo, este artigo aponta possibilidades para retomar conhecimentos prévios, dos estudantes, acerca da noção de comparação, como procedimento de medida de volume, a fim de que a fórmula do volume da esfera tenha um significado lógico, que extrapole a multiplicação dos números .

Referências

- ALBINO, T.C.S. Poliedros. Belo Horizonte, 2011. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_TelmaCristinaAlbino.pdf. Acesso em: 14 jan. 2016.
- ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. RPM, n.10, 2010. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2015.
- BOYER, C.B. *História da Matemática*. São Paulo: USP, 1974.
- BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Ensino Fundamental. Primeiro e segundo ciclos. Brasília: MEC, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Ensino Fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC, 1998.
- COSTA, M.C.M. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In: PONTE, J.P. (Org.). *Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*. Coimbra: Escola Superior de Educação de Coimbra, 2002. p. 257-273.
- GASPAR, J.C.G. Áreas e volumes de corpos redondos na educação básica. 2005. Disponível em: http://www.professores.uff.br/wmrezende/uploads/Monografia_Verso_Final.pdf. Acesso em: 14 jan. 2016.
- GRAVINA, R.C.; SILVA, A.M. Investigando a noção de volume em Geometria Euclidiana. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2008, Recife – PE. *Anais...* Juiz de Fora: UFJF, 2008.
- LOPES, A. *O Enigma das Pirâmides*. São Paulo: Hemus, 1982.
- LULA, K.P. Aplicações do princípio de Cavalieri ao cálculo volumes e áreas. Goiás, 2013. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/3674/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Kariton%20Pereira%20Lula%20-%202013.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2016.
- MARTINS, R.A. Arquimedes e a coroa do rei: problemas históricos. *Cad. Bras. Ensino Fís.*, v.17, n.2 p.115-121, 2000.
- MENEGHETTI, R.C.G. O intuitivo e o lógico no conhecimento matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 2009. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221889010.pdf>. Acesso em: 5 fev. 2016.
- PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Matemática. 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 12 jan. 2016.
- PILATI, G.C. O Princípio de Cavalieri e o volume da esfera. 2015. Disponível em: <http://www.sites.uem.br/profmat/Greyce.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2016.
- POZEBON, S.; LOPES, A.R.L.V. Grandezas e medidas: surgimento histórico e contextualização curricular. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA ULBRA, 6. Canoas-RS 16 a 18 de out. 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/971/908>. Acesso em: 05 fev. 2016.
- SOARES, E.M.S. Formalização e intuição no contexto do conhecimento, do ensino e da atuação social. *Zetetiké*, v.3, n.3, p.63-70, 1995.
- TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ. Stud. Mathem.*, v.12, p.151-169, 1981.