

## Mathematics teachers and their insights into the Respect of Non-Euclidean Geometry

Lucas Ferreira Gomes<sup>a\*</sup>; Eliane Maria de Oliveira Araman<sup>a</sup>; Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Matemática. Londrina, PR, Brasil.

\*E-mail: lucasgomis@hotmail.com

---

### Resumo

Na atualidade, alguns dos documentos que norteiam o ensino de Matemática no Brasil defendem o ensino de tópicos relacionados às geometrias não euclidianas, todavia mesmo com tais orientações, na formação dos professores, na maioria das vezes, estes assuntos não são abordados e, por isso, tais profissionais apresentam dificuldades em trabalhar com estes conceitos em sala de aula. Desta forma, o presente trabalho teve como objetivo investigar as compreensões, bem como os saberes docentes, que professores de Matemática apresentam em relação ao ensino das geometrias não euclidianas. Para tanto, realizou-se uma investigação com professores que atuam na Educação Básica (anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio) na rede pública e privada de ensino no Estado do Paraná. A coleta dos dados se desenvolveu por meio de entrevistas semiestruturadas e a análise destes dados ocorreu a partir dos pressupostos da Análise de Conteúdo. Os resultados obtidos com esta análise apontam que os professores necessitam ampliar seus saberes relacionados às geometrias não euclidianas, principalmente, os disciplinares e curriculares, evidenciando que são necessárias ações formadoras, que possibilitem ampliá-los.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Saberes Docentes. Geometrias Não Euclidianas.

### Abstract

*Currently, some of the documents that guide the Mathematics teaching in Brazil advocate the teaching of topics concerning non-Euclidean geometries, however even with such guidance, Teachers' training, in most cases, is not addressed, and therefore such professionals have difficulties working with these concepts in the classroom. Thus, the present study aimed to investigate the understanding and the faculty knowledge that mathematics teachers have regarding the teaching of non-Euclidean geometries. Therefore, we carried out an investigation with teachers who work in Basic Education (final years of elementary school and high school) in public and private schools in Paraná State. Data collection was developed through semi-structured interviews and the analysis of the same occurred from the Content Analysis assumptions. The results obtained from this analysis indicate that teachers need to expand their knowledge related to non-Euclidean geometries, particularly disciplinary and curricular, showing that educational actions are necessary to enable them to expand.*

**Keywords:** Mathematics Education. Teacher's knowledge. Non Euclidean Geometry.

---

### 1 Introdução

Documentos que norteiam a educação brasileira, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) e as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (PARANÁ, 2008), defendem amplamente a importância da geometria para a formação do aluno, destacando que este estudo deveria iniciar com espaços, formas e as figuras tridimensionais, e que ao longo dos anos escolares os alunos fossem ampliando estes conceitos a partir do estudo das figuras geométricas e o estudo axiomático das propriedades, todavia percebe-se que há muito tempo que a geometria tem sido negligenciada no contexto escolar (SANTOS, 2009). Além disso, a geometria a ser explorada no contexto escolar não se deve restringir a euclidiana, visto que “muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas geometrias não euclidianas” (PARANÁ, 2008, p.56), sendo assim este tópico deve estar presente no contexto escolar.

Lorenzato (1995) e Almoloud (2004) destacam que os professores apresentam muitas dificuldades em trabalhar

com as geometrias, e isso ocorre pelo fato de que muitos não possuem uma formação adequada para o seu ensino. No que tange as geometrias não euclidianas, Ribeiro (2012) remete a ideia de que este tópico é pouco explorado na formação dos professores, evidenciando que esse deveria acontecer de forma mais abrangente.

Neste contexto, pesquisas que almejam a compreensão do processo de formação docente estão, cada vez mais, atraindo o interesse de pesquisadores da área da educação. Destas pode-se destacar as que buscam entender e identificar os saberes construídos e mobilizados pelos professores no decorrer de suas práticas, e estes saberes levam em consideração o fato de que a profissionalização do professor conjectura-se na compreensão da natureza dos saberes, que guiam os docentes em ações pedagógicas (BRITO; ALVES, 2008), ou seja, o professor desempenha inúmeras atividades em sua prática, o que exige a mobilização de diversos saberes. Tais saberes, de acordo como Tardif (2013), podem ser classificados por meio das seguintes tipologias: saberes da formação pedagógica,

saberes disciplinares, saberes curriculares e saberes experienciais.

A partir destes apontamentos, o presente trabalho busca refletir sobre os saberes docentes e o ensino das geometrias não euclidianas, tendo como objetivo investigar as compreensões, bem como os saberes docentes, que professores de Matemática possuem em relação ao ensino das geometrias não euclidianas.

A fim de alcançar tal objetivo, foram realizadas entrevistas com sete professores que atuam na Educação Básica no Estado do Paraná, e que se dispuseram participar da investigação. Por meio dos discursos desses docentes, e embasados nos referenciais teóricos que sustentam a pesquisa, almeja-se estabelecer e identificar elementos que refletem sobre a forma como os professores estão sendo formados para o ensino das geometrias não euclidianas, bem como os saberes que estes sujeitos apresentam em relação a elas, principalmente, os saberes curriculares e disciplinares, como defende Tardif (2013).

## 2 Material e Métodos

A presente pesquisa se caracteriza pela natureza qualitativa, que de acordo com Ludke e André (2013), esta tem mais interesse no processo e nos significados, do que nos próprios resultados obtidos.

A fim de se compreender o fenômeno estudado foram realizadas entrevistas semiestruturadas<sup>1</sup> com sete professores de Matemática, que atuam na Educação Básica (anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio) em algumas cidades do Estado do Paraná (Cornélio Procópio, Leopólis, Cambé, Londrina, Apucarana e Toledo), tanto na rede pública, quanto na rede privada de ensino. Dentre estes sujeitos, é possível destacar que todos são licenciados em Matemática, e entre estes seis possuem especialização nas áreas de Educação e Educação Matemática.

Questionou-se: “O que são as geometrias não euclidianas?”, “Quais as diferenças entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas?”, “Quais documentos curriculares defendem o ensino das geometrias não euclidianas na Educação Básica?” e “Qual a importância de se trabalhar com as geometrias não euclidianas em sala de aula?”

Feita a coleta das entrevistas e transcrição mesmas<sup>2</sup>, deu-se início a análise dos dados, baseando-se nos pressupostos teóricos e metodológicos da Análise do Conteúdo proposta por Laurence Bardin (1979), a qual significa um leque de apetrechos ou, com maior rigor, um único instrumento, mas marcado por grande disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto: as comunicações.

A análise desdobrou-se nas três fases expressas por Bardin (1979):

- a) Pré-análise: leitura fluente das transcrições, no intuito de perceber relações e conhecer o material de análise.
- b) Exploração do material: após a pré-análise, na qual foi desenvolvida a codificação, classificação e agregação, a partir dos significados. Tal processo é aquele em que dados brutos são transformados sistematicamente e agregados em unidades, as quais permitem uma descrição exata das características pertinentes do conteúdo. Por isso, organizou-se a análise a partir do recorte (escolha das unidades de significação) e a classificação e agregação (categorização), levando em consideração as perspectivas da análise temática, a qual pressupõe que o tema é a unidade de significação, que emerge naturalmente das ideias expressas. Desta forma, esta análise constitui em descobrir os temas, que são as unidades de registro que corresponde a regra para o recorte. Feito isso, deu-se início a classificação e agregação das categorias.
- c) Tratamento dos resultados obtidos, a inferência e a interpretação: nesta fase, de forma qualitativa, confrontou-se as categorias com as ideias expressas pela literatura que versa sobre a temática, e que embasa a pesquisa, possibilitando, assim, uma reflexão sobre os dados.

## 3 Resultados e Discussão

Muito se tem discutido sobre os saberes mobilizados pelos professores no exercício profissional, tais discussões estão propiciando o desenvolvimento de diversas pesquisas, como Brito e Alves (2008), Gauthier *et al.* (1996), Tardif (2013), entre tantas outras. Estes e outros autores defendem que a profissionalização da atividade docente deve identificar os saberes próprios do ensino, levando em consideração os contextos reais, em que estes se efetivam, e que muito influenciam nas tomadas de decisões do professor.

Estas pesquisas propõem um ofício de saberes, os quais “formam uma espécie de reservatório” que o professor pode abastecer para atender as necessidades que a ação docente exige (GAUTHIER, 2006). Para Tardif e Gauthier (1996, p.11): “o saber docente é um saber composto de vários saberes”, os quais são responsáveis pela estruturação do conhecimento dos professores, e por isso influenciam na prática pedagógica destes sujeitos.

Neste sentido, os professores são profissionais que desempenham inúmeras tarefas, e nesta ação ele mobiliza diversos saberes, os quais são denominados como saberes docentes. De acordo com Tardif (2013, p.36), os saberes docentes se apresentam como um “saber plural, formado pela amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais”.

Tais saberes são provisórios, pessoal e evoluem com o tempo e com a experiência (TARDIF; GAUTHIER, 1996), isto se deve ao fato de que eles são culturais, por isso podem modificar-se e aprimorar-se mediante a troca de experiências. Além disso, como já se destacou, não são oriundos apenas da formação inicial ou continuada,

<sup>1</sup> Na entrevista semiestruturada o informante tem como possibilidade discorrer sobre as experiências, a partir do foco principal proposto pelo pesquisador; ao mesmo tempo em que tal instrumento permite repostas livres e espontâneas do informante, valoriza a atuação do entrevistador (LIMA; ALMEIDA, 1999).

<sup>2</sup> As entrevistas foram realizadas entre os meses de setembro e outubro de 2015.

estes saberes emergem de diversas fontes, como a prática docente (TARDIF, 2013).

Silva (2009, p.107), baseado em de Tardif (2013), Gauthier

(2006), entre outros, faz uma reflexão sobre as tipologias dos saberes que os professores possuem, bem como as origens destes saberes:

**Quadro1:** Saberes docentes: tipologia, definição e origem

Tipologia	Definição	Origem
Saberes da formação profissional e das ciências da educação	Conjunto de saberes transmitidos pelas instituições de formação de professores (TARDIF, 2013). Carregados de saberes teórico-culturais, subjetivos e intersubjetivos, não menos importantes para o desenvolvimento da prática docente.	Adquiridos durante a formação inicial ou desenvolvidos na profissão, pelas instituições de formação de professores (GAUTHIER <i>et al.</i> , 2006). Obtidos durante o desenvolvimento do trabalho prático do professor, ou seja, os relativos à profissão, e embora não sejam específicos para a prática, norteiam e dão sentido a mesma (TARDIF, 2006).
Saberes disciplinares (matéria/conteúdo)	Resumem-se ao domínio da matéria a ensinar. São sociais, produzidos pelas agências formadoras, em diversas áreas do conhecimento ou matérias.	Elaborados no mundo acadêmico e destinados a um grupo em fase de formação inicial ou continuada. Eles são culturais, científicos.
Saberes curriculares (programa)	Compreensão do conjunto das áreas disciplinares e não disciplinares que integram a organização das atividades formativas de um determinado nível de ensino, bem como o conhecimento da estrutura e seus programas.	Correspondem aos discursos, os objetivos, conteúdos e métodos a partir dos quais a instituição escolar categoriza e apresenta os saberes sociais por ela definidos, e selecionados como modelos da cultura erudita e de formação para esta cultura (TARDIF, 2013).
Saberes da experiência ou práticos	Emergem da experiência docente, nas ações práticas, cotidianas do professor em seu meio social. Validados por um processo de reflexão e troca com os pares. Constituem os fundamentos da competência.	A legitimidade se daria através de uma reflexão crítica com todos os envolvidos no interior da escola, nos momentos de diálogo entre docentes e na formação continuada. Trata-se, pois, de uma aprendizagem que une e integra sabedoria, conhecimento implícito, valores, crenças, ideias, radicados na experiência.
Saberes da tradição pedagógica (o uso) – saber dar aula	É a compreensão da escola enquanto lugar essencialmente destinado ao ensino que cada pessoa tem antes mesmo da sua formação inicial/acadêmica.	Oriundos das experiências dos professores enquanto alunos, originados da vivência adquirida através do contato com diferentes professoras em toda sua vida escolar (PIMENTA, 2005).
Saberes da ação pedagógica	Emergem da experiência; originados da ação pedagógica a partir do momento em que se tornam públicos e que são testados através das pesquisas realizadas em sala de aula.	Com divulgação do mesmo ficaram explícitos os elementos, as teorias, as crenças e as atitudes que os professores utilizam em suas práticas.

Fonte: Adaptado de Silva (2009).

Para o ensino de Matemática, Blanco (2003, p.70) ressalta que o conhecimento deste profissional “está relacionado com os contextos e situações em que ele irá utilizar tal conhecimento, isto é, com atividades, objetivos educacionais e contextos de Matemática”. Além disso, para que os docentes sintam-se aptos para conduzir seus alunos à aprendizagem em Matemática, torna-se necessário uma formação que propicie a estes sujeitos um desenvolvimento dos saberes relacionados ao conteúdo, bem como dos saberes pedagógicos. Dos quais pode-se destacar os saberes curriculares, um dos focos desde estudo, que segundo Tardif (2013, p.38):

[...] correspondem aos discursos, objetivos, conteúdos e métodos a partir dos quais a instituição escolar categoriza e apresenta os saberes sociais por ela definidos e selecionados como modelos da cultura erudita e de formação para a cultura erudita. Apresentam-se concretamente sob a forma de programas escolares (objetivos, conteúdos, métodos) que os professores devem aprender a aplicar.

Desta forma, os saberes curriculares devem estar na base da formação do professor, de modo que esses saberes possibilitam conhecer a entidade do currículo, possibilitando

compreender como ocorre o ensino de assuntos e tópicos específicos em um determinado nível, isto é, o que deve ser ensinado e em que momento, mas também o como ensinar tais tópicos. Sendo assim, estes são responsáveis por propiciar aos docentes planejar e desenvolver suas aulas.

Além destes aspectos, no ensino de Matemática da atualidade encontra-se uma ausência do ensino da geometria, como destaca Santos (2009), e isso não é recente, em meados dos anos noventa, Pavanelo (1993, p.16) já dizia que “ausência do ensino de geometria e a ênfase no da álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamentos necessários à resolução de problemas matemáticos”. Esta ausência pode dar indícios de que os saberes relacionados ao ensino da geometria na formação dos professores estão sendo pouco desenvolvidos, por isso a necessidade de investigar essa problemática.

### 3.1 As geometrias não euclidianas e o seu ensino

Embora a geometria seja um dos principais ramos da

Matemática que propicia ao aluno uma aproximação com o mundo real, seu ensino é pouco explorado na Educação Básica. Entre as pesquisas que atestam isso pode-se citar Lorenzato (1995) e Pavanelo (1993), os quais ressaltam uma ausência do ensino da geometria na Educação Básica e, ainda, defendem que esse fenômeno acontece devido ao fato de que a maioria dos professores saem despreparados da formação que recebem para ministrá-la, e como consequência acabam dando preferência a aritmética e a álgebra.

Os conhecimentos advindos da geometria contribuem para o desenvolvimento de diversas potencialidades, como orientação, noção de espaço e de forma, compreensão de distâncias, entre outras, que poderão contribuir para forma como estes sujeitos irão compreender e representar o mundo em que vivem e, até mesmo, o modo como eles irão agir nesse meio. Sendo assim, não propor o estudo destes conceitos é privar os alunos de desenvolver tais aptidões. De acordo com Lorenzato (1995, p.13):

Sem estudar geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade elas, dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da geometria como fator altamente facilitador para a compreensão de questões de outras áreas de conhecimento humano.

Neste viés, documentos norteadores como os PCN – Matemática (BRASIL, 1998) defendem amplamente seu ensino e seu estudo começa a ser discutido em congressos e eventos da área da Educação Matemática, além dos livros didáticos que seguindo estas propostas começam a mudar. No entanto, um dos problemas que se pode notar é que embora as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2008) propõem o ensino das geometrias não euclidianas e defendam que ele deve estar presente nas grades curriculares, os conceitos relacionados a esta temática ainda são pouco explorados no contexto escolar.

Uma justificativa para isto é que a história é muito recente, sua origem encontra-se, de acordo com Struik (1989, p.92), no fim do século XVIII, período em que filósofos começam a questionar os postulados de Euclides, com o argumento de que “se há a possibilidade apenas de uma única geometria, certos postulados ou noções comuns seriam teoremas, isto é, seriam uma consequência lógica de proposições primeiras”.

O quinto postulado do livro I (a relação entre ‘axiomas e postulados’ não é muito clara em Euclides) é equivalente ao chamado ‘axioma das paralelas’, de acordo com o qual, por um ponto passa uma reta dada e uma só. As tentativas de reduzir esse axioma a um teorema conduziram, no século XIX, a uma apreciação completa da sensatez do ponto de vista de Euclides ao adaptá-lo como um axioma e levaram à descoberta das chamadas geometrias não euclidianas (STRUICK, 1989, p.92).

Desta forma, entende-se que na tentativa de se compreender e demonstrar o quinto postulado de Euclides surgiram as chamadas geometrias não euclidianas. Além disso, seu estudo tornou-se necessário devido ao fato de

que a geometria euclidiana apenas descrevia o mundo em aproximação (BOYER, 1986) e, indo além:

A partir das grandes descobertas e invenções o homem tem buscado nos meios científicos, respostas para problemas concernentes às medidas geométricas. A partir dessa busca, tem constatado que, para algumas medidas, os conceitos da Geometria Euclidiana respondem satisfatoriamente, para os problemas que envolvam as pequenas medidas, mas para as medidas de grande escala, são necessários os conceitos de Geometrias não euclidianas (MARTOS, 2002, p.212).

Todavia, cabe a escola propor situações que levem aos alunos refletir sobre estes conceitos, a fim de que desenvolvam essas compreensões. Para tanto, Coutinho (2001) e Martos (2002) ressaltam que ao aplicar estes conhecimentos nas aulas de Matemática, ainda se encontra uma relutância, tanto pelos alunos, quanto pelos professores, mesmo assim defendem que não é algo impossível e pode trazer inúmeras contribuições para formação dos educandos e, por isso, deve ser trabalhado no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

### 3.2 Discussão

Apresenta-se os dados e também se busca fazer uma análise dos mesmos, apoiada nos pressupostos da Análise do Conteúdo, mas sobretudo nos estudos realizados a respeito da formação docente, dos saberes e das geometrias não euclidianas. Para tanto, este texto está organizada de acordo com o estudo de cada questão, apresentado as respostas dos sujeitos (a partir das categorias) e as confrontando com a literatura, possibilitando uma reflexão a respeito dessa temática.

Para explicitar as perspectivas expressas pelos docentes investigados são apresentados trechos de suas falas, frutos dos recortes empregados para categorização. Para uma melhor compreensão, serão utilizadas as siglas: S1, S2, S3, S4, S5, S6 e S7, destas S1 representa a fala do primeiro professor entrevistado, S2 remete ao segundo professor entrevistado, e assim por diante. Antes da apresentação e análise dos dados, destaca-se a dificuldade que a maioria dos professores demonstrou ao responder aos questionamentos realizados, tal aspecto pode dar indício das dificuldades deles com relação ao tema.

A primeira questão explorada é “O que são as geometrias não euclidianas?”, na sequência são apresentadas as falas dos sujeitos, destacando os aspectos significativos para o contexto da pesquisa. Na perspectiva dos docentes S2, S5 e S7 é a geometria que se baseia no estudo das superfícies e formas não planas. Seguem algumas falas:

Na minha concepção [...] É aquela geometria das curvas, não só das superfícies planas. (S2)  
[...] são geometrias que não estão no plano. (S5)  
Pelo que já vi, ela remete as figuras que não estão no plano, mas nas esferas, nos cones [...] (S7)

Esses professores apresentam uma percepção de que a base para o desenvolvimento das geometrias não euclidianas são as superfícies curvas, isto é, o estudo das formas e elementos

das geometrias plana e, até mesmo, a espacial em superfícies que se diferem do plano. Porém, eles não expressam o que são estas superfícies chamadas de curvas, mas de acordo com Rodrigues (1960), estas superfícies são geradas a partir de linhas curvas, que se desenvolvem no espaço tridimensional seguindo leis específicas de geração. Segundo os tipos de entes geradores irão configurar os grupos de superfícies circulares em geral, geradas pelo movimento de circunferências e, em geral, superfícies quádricas em geral, geradas pelo movimento de outros tipos de curvas.

Tal compreensão não fica evidente nas falas, mas segundo um dos professores (S7) ele emprega os termos cone e esfera como superfícies, sendo estes elementos da geometria espacial, mas que também é foco de estudo da geometria analítica, assim como o hiperbolóide, elipsóide, etc., desta forma estes sujeitos não conseguem conceituar o que são as geometrias não euclidianas sem se remeter as geometrias euclidianas.

Os professores S2, S3 e S4 afirmam que são as geometrias que não são euclidianas ou que discordam, em alguns aspectos, da geometria de Euclides. Observe alguns trechos:

[...] que é uma geometria que não é euclidiana. (S2)  
São as geometrias não ligadas aos poliedros polígonos de Euclides, e que não segue seus postulados. (S3)  
A euclidiana é baseada em postulados e em axiomas em duas e três dimensões, a não euclidiana ela também tem regras, postulados, mas é [...] discorda um pouquinho do que foi feito na euclidiana, por isso que é não euclidiana. (S4)

A partir da fala de S2, é possível identificar que tal sujeito não explicita um conceito para geometrias não euclidianas, pois apenas remete ao que o próprio termo já diz *não* euclidiana, o que pode dar indícios de que este docente desconhece sua definição. Já S3 e S4 ressaltam “diferenças” que remetem a postulados, axiomas e figuras das geometrias euclidianas, desta forma estes sujeitos também não conseguem conceituar as geometrias não euclidianas sem reportarem-se as geometrias euclidianas.

De acordo com os professores S1 e S6, as geometrias não euclidianas se reportam a geometria dos fractais. Observe:

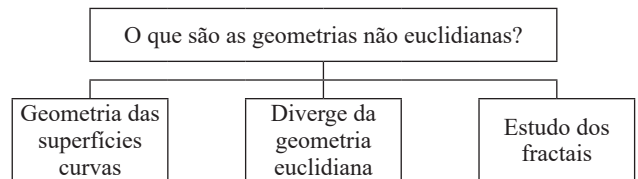
Ao falar de geometrias não euclidianas já me vem a memória os fractais, que é o que eu tive contato. (S1)  
Pra mim fala dos fractais, destas formas diferentes de composição de figuras. (S6)

Neste sentido, S1 e S2 se referem a apenas um dos tópicos das geometrias não euclidianas, contudo este tema é composto por muitos outros, como citam as DCE (PARANÁ, 2008, p.56): “noções básicas das geometrias não euclidianas, geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados)”.

Desta forma, para o primeiro questionamento: “O que são as geometrias não euclidianas?”, as repostas puderam ser organizadas nas seguintes categorias: (1) Geometria das

superfícies curvas (acredita que são as geometrias que se baseiam em superfícies não planas, isto é, nas curvas – S2, S5 e S7); (2) Diverge da geometria euclidiana (são as geometrias que se diferem em algum aspecto da geometria euclidiana – S2, S3 e S4); (3) Estudo dos fractais (se refere ao estudo dos fractais – S1 e S6). Em síntese, é possível explicitar as repostas nas seguintes categorias:

**Figura 1:** Categorias para questão: “O que são as geometrias não euclidianas?”



Fonte: Dados da pesquisa.

No percurso da construção da definição deste termo, Amoroso Costa (1929, p.201), na metade do século passado, definiu as geometrias não euclidianas como “qualquer dos sistemas dedutivos construídos sobre a negação do chamado [quinto] postulado de Euclides, conservadas e completadas [...] as demais proposições primitivas de Euclides”.

Todavia, Santos (2009, p.14) afirma que:

A proposta da DCE para as geometrias não euclidianas na Educação Básica não se refere apenas às geometrias que historicamente são denominadas como tais, ou seja, a Geometria Hiperbólica e a Elíptica, mas a qualquer geometria que negue pelo menos dos cinco postulados de Euclides.

Por isso, entende-se que as geometrias não euclidianas são todas aquelas geometrias que possuem algum axioma, que contradiz algum axioma euclidiano. Dentre as respostas explicitadas, a que mais vai ao encontro desta perspectiva é a expressa na segunda categoria (pelos sujeitos S3 e S4), porém é uma perspectiva bem mais simplista do que esta, citando postulados, axiomas e figuras, mas não especificam de que maneira isto acontece.

Neste sentido, entende-se que os saberes disciplinares relacionados à compreensão do que são as geometrias não euclidianas devem ser desenvolvidos por estes sujeitos, visto que mesmo ao conhecer o conteúdo não garante o ensino (TARDIF, 2013), o professor deve conhecer o que ensina.

A partir disto, a segunda questão a ser analisada é “Quais as diferenças entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas?”. Para isso, apresenta-se a seguir as falas dos sujeitos, destacando os aspectos significativos que respondem tal questionamento, bem como uma reflexão sobre estas.

Para os professores: S1, S2, S4, S5 e S7, a principal diferença entre elas é o estudo das figuras planas em outras superfícies, isto é, as modificações nas propriedades e na forma de uma figura, quando está contida em uma superfície não plana. Veja algumas falas:

[...] o triângulo na esfera [...] é [...] meu tinha essa ideia de que o triângulo na esfera é diferente de um triângulo plano. (S1)

A geometria euclidiana a gente trabalha com ela num plano, e a geometria não euclidiana a gente trabalha com ela em superfícies curvas. (S2)

[...] é um estudo de figuras não mais planas, certinho, bonitinha, ela é... ela tem distorções nas imagens. (S4)

[...] eu sei dar exemplo, mas explicar a diferença... quando você fala da sela do cavalo... que a soma dos ângulos internos, quando a gente tem um triângulo na sela do cavalo não é 180. Agora te explicar a diferença... eu sei que essa parte tem alguma coisa a ver com os ângulos. (S5)

As duas estudam as figuras e as formas, mas o que muda é a superfície onde estas formas estão inseridas, pois quando muda a superfície a figura muda sua forma [...] sofre uma deformação e aí elas se diferem. (S7)

A partir destas falas, é possível notar que os professores reconhecem algumas das diferenças entre as figuras estudadas pela geometria plana e aquelas estudadas pelas geometrias não euclidianas, como pode-se notar nos exemplos citados por S1 e S5 sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo em superfícies como a esfera e o parabolóide hiperbólico; já S2, S4 e S5 falam das deformações que as figuras sofrem, quando estão contidas em superfícies não-planas. Todavia, é possível destacar que não há um rigor matemático nos elementos expressos, além disso, estes docentes não citam muitos dos elementos que as diferem, dos quais alguns são expressos por Ribnikov (1987) no trecho a seguir, mas no que se reportam as diferenças entre a geometria euclidiana e a de Lobachevsky<sup>3</sup>:

a) a disposição das retas paralelas; b) a soma dos ângulos em triângulos e polígonos; c) as áreas; d) os polígonos inscritos e circunscritos na circunferência; e) a semelhança e congruência de figuras; f) a trigonometria; g) o teorema de Pitágoras; h) as medições do círculo e suas partes (RIBNIKOV, 1987, p. 434).

Já os professores S3 e S6 não conseguem explicitar as diferenças entre as geometrias euclidiana e não euclidianas, como se pode observar em suas falas:

Não sei responder [...] na formação que tive não trabalhei com as geometrias não euclidianas. (S3)

Eu não sei falar dessas diferenças, mas sei que são muitas diferenças. (S6)

Pelas falas, entende-se que estes sujeitos não explicitam as diferenças, e ainda um deles fala sobre a formação inicial, que não o possibilitou desenvolver conhecimentos em relação às geometrias não euclidianas. De acordo com Ribeiro (2012, p.33):

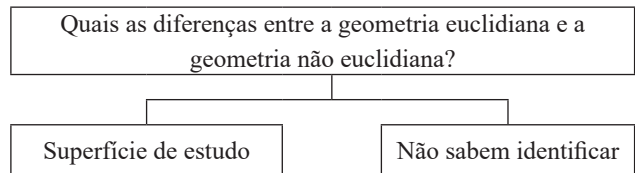
Independente se as geometrias não euclidianas devem ou não ser ensinadas para um público que não seja de especialistas em matemática, há muito motivos para que um especialista tenha conhecimento destas estruturas. O surgimento destas geometrias foi o grande passo para modificar o conceito de verdade matemática.

Sendo assim, a formação do professor de Matemática deveria propiciar a estes sujeitos que compreendessem os conceitos, bem como a estrutura das geometrias não euclidianas.

Em consequência disto, no que se refere à pergunta: Quais

as diferenças entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas? As respostas puderam ser agrupadas nas seguintes categorias: 1) Superfície de estudo (a superfície em que se estudam as figuras e suas propriedades: a euclidiana desenvolve seu estudo no plano e as não euclidianas em outras superfícies, como as curvas – S1, S2, S4, S5 e S7); e 2) Não sabem identificar (não identificam as diferenças – S3 e S6). Pode-se sintetizar as respostas no seguinte esquema:

**Figura 2:** Categorias para questão “Quais as diferenças entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas?”



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir do que foi explicitado pelos sujeitos da pesquisa para este questionamento e o anterior, compreende-se que tais profissionais apresentam alguns dos saberes disciplinares, aqueles que dizem respeito aos saberes específicos da matéria (TARDIF, 2013), relacionados às geometrias não euclidianas, todavia estes ainda estão muito aquém do que a literatura propõe, por isso destaca-se que estes docentes ainda devem desenvolver estes saberes, visto que segundo Bonete (2000, p.230):

[...] o conhecimento das geometrias não euclidianas pode proporcionar aos futuros professores um melhor preparo para que possam atuar no ensino fundamental e médio com a disciplina de matemática e, em especial, o ensino da geometria.

Dando sequência, reflete-se sobre as respostas para a pergunta: Quais documentos curriculares defendem o ensino das geometrias não euclidianas na Educação Básica? Assim como nas questões anteriores, apresenta-se a fala dos sujeitos destacando as falas mais significativas, fazendo uma reflexão sobre elas.

De acordo com os professores S1 e S6, as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008) trazem, em sua proposta, tópicos das geometrias não euclidianas. Observe as falas:

[...] as DCE têm, a gente coloca no plano de ensino, lá no último tópico e nunca dá tempo de trabalhar. (S1)

[...] pelo que já estudei e utilizei para fazer meus planejamentos as DCE do Paraná trazem, mas a gente nem coloca no planejamento. (S6)

Para os sujeitos S3 e S7, tanto Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), quanto as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008) defendem o ensino das geometrias na Educação Básica. Note as falas:

Os parâmetros [...] As diretrizes do Paraná... Tem mas não deixa muito claro. Talvez ela defenda algum tópico que a gente pensa que é uma geometria plana ou espacial e ela é

3 Uma das geometrias não euclidianas propostas pelo matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky em meados do século XIX.

não euclidiana. Talvez, é falta de formação do professor para saber disso. (S3)  
Pelo que já li [...] Eu já vi alguma coisa nas DCE e nos Parâmetros. (S7)

A partir do que os professores S1, S3, S6 e S7 exprimem, é possível fazer duas observações: 1) eles reconhecem que as duas principais propostas curriculares, para o estado em que atuam, defendem o ensino das geometrias não euclidianas, porém não explanam o que tais documentos defendem; 2) mesmo que reconheçam que documentos norteadores para o ensino propõem o estudo das geometrias não euclidianas, S1 e S6 alegam que nunca trabalharam com este tema em suas aulas.

Estes apontamentos remetem a discussão proposta por Perrenoud (2003), a qual ressalta que há um grande distanciamento do currículo prescrito (o planejamento que professor produz e que se baseiam nos documentos curriculares) e o currículo real (que se efetiva na prática da sala de aula), ou seja, muitos dos tópicos que os docentes colocam em seus planejamentos eles não trabalham com seus alunos.

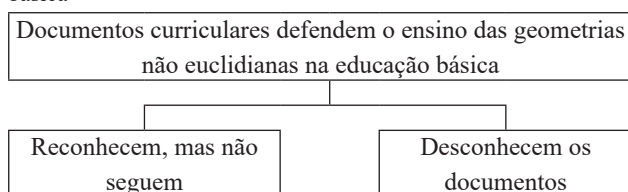
Por fim, os professores S2, S4 e S5 dizem que não se lembram de quais documentos fazem estes apontamentos. Observe alguns trechos:

Não me lembro, mas do que eu li das DCE e os PCN, eu não me lembro se aborda a geometria não euclidiana. Eu não sei dizer [...] não me lembro de ter lido sobre isso neles. Poder estar em uma parte que eu pulei. (S2)

Não me recordo, posso até ter visto, mas não me recordo. (S4)  
Que eu lembre? Eu acho que é nos parâmetros, mas eu não me lembro [...] Se eu não me engano [...] Eu usei a pra fazer [...] mas foi há oito anos e não me lembro direito, mas foi algo assim que eu usei. (S5)

Sendo assim, no que se remete aos documentos curriculares, que defendem o ensino das geometrias não euclidianas na educação básica, as respostas obtidas foram dispostas de acordo com as seguintes categorias: 1) Reconhecem, mas não seguem (compreendem que documentos como as DCE (PARANÁ, 2008) e os PCN (BRASIL, 1998) defendem o ensino das geometrias não euclidianas, mas alguns não seguem – S1, S3, S6 e S7); e 2) Desconhecem os documentos (não se lembram de nenhum documento curricular que propõe o ensino das geometrias não euclidianas – S2, S5 e S6). Tais categorias são sintetizadas no esquema a seguir:

**Figura 3:** Categorias para questão “Documentos curriculares que defendem o ensino das geometrias não euclidianas na educação básica”



**Fonte:** Dados da pesquisa.

Para tanto, compreende-se que as duas propostas

curriculares citadas pelos sujeitos investigados trazem a proposta de se trabalhar com as geometrias não euclidianas, mas com enfoques diferentes.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998) falam da importância do surgimento das geometrias não euclidianas para a compreensão das rupturas dos paradigmas que esse conhecimento sofreu, além de contribuir para a compreensão do desenvolvimento do conhecimento matemático. Segundo esta proposta para o Ensino Fundamental:

[...] mudanças no paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para a aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico (BRASIL, 1998, p.25).

Contudo, essa ênfase se dá apenas para o Ensino Fundamental, já para o Ensino Médio esse aspecto fica de forma implícita no documento.

Já as Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná (2008) sugerem a inserção das geometrias não euclidianas no currículo. Este documento defende que a geometria hiperbólica e a elíptica sejam trabalhadas no Ensino Médio, além de deixar livre para a inserção de outros tópicos.

Tais apontamentos evidenciam que os saberes curriculares, que dizem respeito aos programas escolares (objetivos, conteúdos, métodos) que o professor deve conhecer e aplicar (TARDIF, 2013), ainda deve ser ampliado por estes sujeitos, até mesmo porque três de sete sujeitos não souberam nem explicitar pelo menos uma destas propostas, além do fato de que alguns dos professores reconhecem alguns destes documentos, porém não seguem o que eles defendem.

A última questão a ser analisada é: Qual a importância de se trabalhar com as geometrias não euclidianas em sala de aula? A análise está explicitada da mesma forma como as demais questões.

Para os professores S1, S2, S3, S5 e S7, é importante explorar as geometrias não euclidianas em sala de aula, porque esta possibilita ao aluno compreender muitos elementos da natureza, visto que nela nem tudo é plano. Observe as falas:

Para o aluno ter a noção de que nem tudo na natureza é plano, nem tudo na natureza é perfeito... a geometria plana não dá conta de explicar tudo que existe na natureza, ai a gente não consegue explicar tudo isso. (S1)

Por que no contexto da vida real a gente vai ter a situação que a geometria euclidiana não responde. [...] teríamos que abordar os dois tipos de geometrias, uma vez que ele encontrará ela na sua vida cotidiana. Talvez não com a nomenclatura dela certinho, mas ele vai ter esse conceito. (S2)

[...] talvez pelo pouco contato do professor com a geometria e não saber suas verdadeiras aplicações, mas são elas que os alunos utilizam no seu dia a dia. (S3)

[...] os alunos se deparam com situações no dia a dia em que demanda a geometria não euclidiana por isso ele deve conhecê-la. (S7)

Tais professores defendem aspectos que lembram o que defende Cabariti (2004, p.153) no fim do trecho a seguir:

Pode favorecer o processo de compreensão das principais características e natureza da Matemática, visto que este conhecimento faz-se presente não apenas pela quantificação do real e pelo desenvolvimento de técnicas de cálculos com números e com as grandezas, mas sobretudo, pela criação de sistemas abstratos que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados por vezes a fenômenos do mundo físico.

Segundo este autor, muito mais que compreender os fenômenos físicos e o mundo que os rodeia, as geometrias não euclidianas possibilitam uma compreensão da natureza Matemática. Na qual nem tudo é estável, pois pode-se questionar suas verdades, testar possibilidades e, então, redescobrir seus conceitos, axiomas e postulados.

De acordo com os docentes S4 e S6, as geometrias não euclidianas devem ser levadas para o contexto escolar pelo fato de que ela auxilia na aquisição de uma nova visão a respeito das coisas e a da própria Matemática.

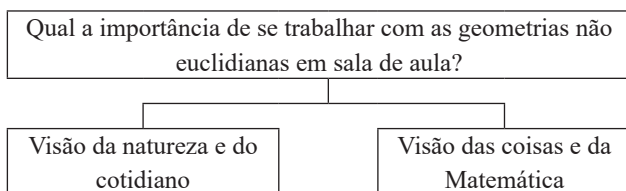
Eu acho que se desprende bastante a geometria não euclidiana, ela abre horizontes assim, você para de pensar em uma coisa única, você começa a ver outros modos de se pensar, então você abre um pouco o horizonte, da coisa que achava a é isso... opa... espera aí você começa a analisar e são outras situações, outros casos, outras dimensões. (S4)

As geometrias não euclidianas contribuem para o desenvolvimento de uma nova compreensão das coisas até mesmo da matemática, sob uma nova perspectiva. (S6)

Estas perspectivas vão ao encontro de alguns argumentos que defende Berro (2008, p.78), o qual diz que ao ter um contato com as geometrias não euclidianas “os alunos comecem a enxergar o Universo com olhares distintos do que estão acostumados a fitar, bem como ter uma visão mais crítica do que passa ao seu redor [...] é uma oportunidade excepcional de apresentar um tema complexo utilizando figuras de rara beleza”.

A partir disto, no que se refere à importância de se trabalhar com as geometrias não euclidianas em sala de aula, as respostas obtidas puderam ser organizadas em duas categorias: 1) Visão da natureza e do cotidiano (auxilia no desenvolvimento de uma nova visão sobre natureza e das coisas do cotidiano – S1, S2, S3, S5 e S7); e 2) Visão das coisas e da Matemática (contribui para o desenvolvimento de uma nova visão das coisas e da própria Matemática – S4 e S6). Desta forma, foram sistematizadas as categorias de acordo com a figura a seguir:

**Figura 4:** Categorias para questão “Quais as diferenças entre a geometria euclidiana e a geometria não euclidiana?”



Fonte: Dados da pesquisa.

Considera-se que quando se fala da importância de se trabalhar com um determinado conteúdo se refere,

implicitamente, aos objetivos de um determinado tópico, os quais estão contemplados nos saberes disciplinares e curriculares a partir do enfoque de Tardif (2013). Neste trabalho, pressupõe-se o ensino das geometrias não euclidianas na Educação Básica como assunto necessário, pois auxilia na compreensão, por parte do aluno, de que a geometria euclidiana não é a única possível e praticável no mundo em que se vive e que muitos problemas do cotidiano do homem e do mundo científico são solucionados por geometrias não-euclidianas.

Desta forma, uma das principais contribuições deste tópico para a formação dos alunos é a mudança na percepção de que a Matemática contempla verdades prontas e acabadas, mas que podem ser questionadas e possibilitam a descoberta de novos conceitos. Tal perspectiva, de modo muito mais simplista, é apontada apenas pelo sujeito S6. Neste contexto, os saberes que dizem respeito aos objetivos do ensino das geometrias não euclidianas também devem ser ampliados pelos sujeitos entrevistados.

#### 4 Conclusão

O presente trabalho buscou refletir sobre a formação dos professores a respeito das geometrias não euclidianas, no que tange aos saberes docentes já constituídos, os quais efetivam a ação docente.

A partir da investigação desenvolvida foi possível compreender que os professores investigados apresentam saberes limitados em relação a este tópico, o que tem desencadeado reflexos na prática dos mesmos, visto que todos eles alegam nunca ter trabalhado em sala de aula com as geometrias não euclidianas. E isso não acontece no ensino apenas deste tópico, pois, na maioria das vezes, os docentes precisam tomar decisões no decorrer de sua prática, sem poderem se apoiar em um “saber-fazer”, que lhes possibilitem dominar a situação com toda certeza.

Neste sentido, muitos docentes não possuem uma boa formação para o ensino das geometrias, por isso eles possuem certa dificuldade em explorá-la, em sala de aula, e isto fica muito evidente a partir das falas destes sujeitos, dos quais apenas dois alegam ter tido um contato com as geometrias não euclidianas em sua formação inicial, mas apenas tópicos isolados como a geometria esférica e a geometria fractal.

Desta forma, o objetivo de investigar como os professores que atuam na educação básica compreendem as geometrias não euclidianas, bem como os saberes que estes sujeitos têm em relação a este tópico foi alcançado com sucesso. Mediante levantamento bibliográfico, da coleta e da análise dos dados foi possível perceber que são necessárias ações que possibilitem suprir algumas lacunas na formação destes professores, pois estas limitações estão motivando a não abordagem das geometrias não euclidianas por estes sujeitos, privando seus alunos de desenvolverem todas as potencialidades, que este tópico possibilita.



## Referências

- ALMOULOU, S.A. *et al.* A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Rev. Bras. Educ.*, v.27, p.94-108, 2004.
- AMOROSO COSTA, M. *As ideias fundamentais da Matemática*. Rio de Janeiro: Pimenta de Mello, 1929.
- BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1979.
- BLANCO, M.M.G. A formação inicial de professores de matemática: fundamentos para a definição de um curriculum. In: FIORENTINI, D. (Org.). *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas: Mercado de Letras, 2003. p.51-86.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BERRO, R.T. *Relações entre arte e matemática: um estudo da obra de Maurits Cornelis Escher*. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade São Francisco. Itatiba, 2008.
- BOYER, C. B.; PÉREZ, M. Mrtínez. *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, 1986.
- BONETE, *As geometrias não euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências*. 2000. 239 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2000.
- BRITO, A.J.; ALVES, F.T.O. Profissionalização e saberes docentes: análise de uma experiência em formação inicial de professores de matemática. In: NACARATO, A.M.; PAIVA, M.A.V. (Org.). *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
- CABARITI, E. *Geometria hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado*. 2004. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2004.
- COUTINHO, L. *Convite às geometrias não euclidianas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.
- GAUTHIER, C. *Por uma teoria da Pedagogia, pesquisas contemporâneas sobre o saber docente*. Rio Grande do Sul: Unijui, 2006.
- LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *Educ. Matemática Rev.*, n. 4, p.3-13, 1995.
- LUDKE, M.; ANDRÉ, M. *Pesquisa em educação matemática: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 2013.
- MARTOS, Z.G. *Geometrias não euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no ensino fundamental*. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.
- LIMA, M.A.D.S.; ALMEIDA, M.C.P.; LIMA, C.C.A utilização da observação participante e da entrevista semi-estruturada na pesquisa de enfermagem. *Rev. Gaúcha Enferm.*, v.20, p.130-142, 1999.
- PARANÁ. *Diretrizes curriculares da educação básica de matemática*. Curitiba: SEED, 2008.
- PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, v.1, n.1, p.7-17, 1993.
- PERRENOUD, P. Sucesso na escola: só o currículo, nada mais que o currículo. *Cad. Pesq.*, v.119, p 7-26, 2003.
- PIMENTA, S.G. Formação de professores: identidade e saberes da docência. *Saberes pedagógicos e atividade docente*. São Paulo: Cortez, 2005.
- RIBEIRO, R.D.G.L. *O ensino das geometrias não euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica*. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de São Paulo. São Paulo, 2012.
- RIBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas*. Moscú: Mir, 1987.
- RODRIGUES, A.J. *Geometria descritiva: projetividade, curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1960.
- SANTOS, T.S. *A inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica*. 2009. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2009.
- SILVA, A.C. *Reflexão sobre a matemática e seu processo de ensino-aprendizagem: implicações na (re)elaboração de concepções e práticas de professores*. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2009.
- STRUIK, D. J. *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.
- TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. Rio de Janeiro: Vozes, 2013.
- TARDIF, M.; GAUTHIER, C. *O saber profissional dos professores: fundamentos e epistemologia*. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA SOBRE O SABER DOCENTE, 1, 1996, Fortaleza. *Anais...* Fortaleza: UFCE, 1996.