

## Engenharia Didática para o Teorema de Binet, ou Lamé, ou de De Moivre: Análises Preliminares e *a Priori*

### Didactical Engineering for the Binnet's theorem, or Lamé's theorem or De Moivre's theorem: preliminary and *a priori* analysis

Francisco Regis Vieira Alves<sup>a\*</sup>; Marlene Alves Dias<sup>b</sup><sup>a</sup>Instituto Federal de Educação Tecnológica do Ceará, Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática. CE, Brasil.<sup>b</sup>Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* e Educação Matemática. SP, Brasil.\*E-mail: [fregis@gmx.fr](mailto:fregis@gmx.fr)

#### Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de Engenharia Didática - ED que descreve, apenas, as etapas de análises preliminares, análise *a priori* (e a concepção de duas situações didáticas), que correspondem aos dois primeiros momentos previstos, de modo sistemático, pela ED no campo da Didática da Matemática. O tema envolve uma das formas ou possibilidades de generalização do modelo secular, que prevê a reprodução de casais de coelhos, nomeado por Sequência de Fibonacci – SF. Diante do rico e variado percurso de evolução e sistematização do referido modelo, opta-se pela generalização de uma fórmula, cuja autoria envolve informações conflitantes, embora seja mais conhecida, de acordo com os autores de livros de História da Matemática, como fórmula de Binnet ou Teorema de Binnet. A descrição de duas etapas iniciais de uma ED envolvem elementos que detêm a possibilidade de explorar novas concepções dos estudantes acerca da SF, inclusive, tendo em vista o uso do CAS Maple, em um contexto de investigação histórica, assumindo uma perspectiva de ensino afetada pela Teoria das Situações Didáticas – TSD.

**Palavras-chave:** Sequência de Fibonacci. Generalização do Modelo. Engenharia Didática. Ensino e Tecnologia.

#### Abstract

*This work presents a proposal of Didactical Engineering – DE, describing just the preliminarily analyzes and a priori analysis (and the didactical conception's situations) which correspond to the first two levels in accordance to ED, in the Didactics of Mathematics. The theme involves one way of possibilities to obtain a kind of generalization relative to a secular model, which provides the couples of rabbits reproduction, namely by Fibonacci Sequence – FS. Before the rich and varied path of evolution and its systematization of this model, it is opted for the formula generalization, whose authorship involves a conflicting information, however, it is known, according to the authors of Mathematical History, as a Binnet's formula or the Binnet's theorem. The description of the two initial research steps involves some elements that have the potencial to explore new conceptions of the students about the FS, even considering the use of CAS Maple, in a historical research context, supported by the Theory of Didactical Situations – TDS.*

**Keywords:** Fibonacci Sequence. Model Generalization. Didactical Engineering. Teaching and Technology.

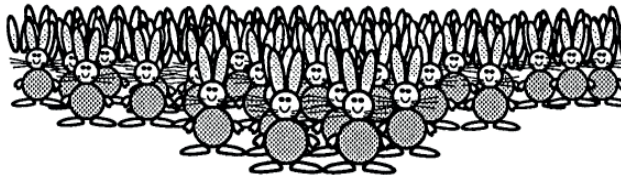
#### 1 Introdução

A sequência emblemática que descreve a reprodução de casais de coelhos recebe atenção garantida por parte de inúmeros autores de livros de História da Matemática – HM. O modelo de reprodução se apresenta como o preferido dos autores, no intuito de fornecer uma descrição significativa (intuitiva) e lúdica do que, matematicamente, chama-se de Sequência Recursiva Linear Homogênea Recorrente e, de modo tradicional, conhece-se por Sequência de Fibonacci - SF e, denotamo-la por  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ , com  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

A equação  $f_{n+1} - f_n - f_{n-1} = 0$  não permite, de imediato, a descrição explícita dos seus termos, sem a necessidade de se avaliar, caso a caso, alguns elementos iniciais. Por outro lado, a seguinte formulação  $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , viabiliza a obtenção de qualquer eventual termo que comparece na seguinte listagem numérica  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377, \dots)$

(\*) e, aonde admitem-se, doravante, os seguintes números irracionais  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Por outro lado, a fórmula explícita anterior possui, também, as seguintes formulações h o d i e r n a s :  $f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-i}{i} + \dots$  c o m  $n - i \geq i \geq 0$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$  ou  $f_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-i-1}{i}$ ,  $n \geq 1$  (KOSHY, 2007, p. 130). Em qualquer das descrições anteriores, em um primeiro momento, um aluno, ao desenvolver uma atividade apreciativa ou investigativa, das três fórmulas explícitas, poderia questionar que, se seu resultado final efetivo, quando se passa a avaliar seus índices em  $\mathbb{N}$  conduzem, de fato, aos números inteiros positivos, que são divisados em (\*), em consonância com a produção/reprodução de pares de coelhos (Figura 1). Isso posto, registra-se um problema de entendimento do estudante (ALVES, 2016), com referência a um modelo matemático emblemático, qual seja o entendimento da correlação da fórmula explícita da SF como a produção biológica ideal de coelhos e seu respectivo comportamento matemático.

Figura 1 - Sequência de coelhos imortais



Fonte: Gullberg (1997)

Logo em seguida, traz-se ao leitor, de modo pormenorizado, elementos de ordem histórica e epistemológica, no contexto de uma discussão do modelo, proposto desde 1202, por Leonardo Pisano (1175-1250), em seu livro, intitulado *Liber Abaci* (KOSHY, 2011) e revisado em 1228 (VADJDA, 1989). Com a identificação e demarcação de um certo terreno epistêmico, logo em seguida, apresentam-se as etapas iniciais de uma Engenharia Didática – ED, tendo como escopo, a estruturação de situações-problema relacionadas com o referido modelo matemático e a proposição de elementos, que devem permitir a superação de determinados obstáculos ao ensino, no contexto de História da Matemática e investigação.

Antes, porém, cabe a indicação do seguinte questionamento ou demarcação do objetivo do presente trabalho: descrever, demarcar, indicar e registrar elementos de ordem histórico, matemática evolutiva concernente à fórmula explícita dos termos presentes na sequência de Fibonacci.

O objetivo anterior permite, ainda, a eleição dos seguintes objetivos específicos: (i) discutir elementos de ordem histórica que possam concorrer em melhor precisão histórica a respeito da origem da fórmula explícita dos termos presentes na sequência de Fibonacci; (ii) descrever uma abordagem metodológica para o ensino da fórmula explícita dos termos presentes na sequência de Fibonacci.

## 2 Desenvolvimento

Com origem nos objetivos indicados anteriormente, buscase descrever uma trajetória com amparo em um levantamento de livros de História da Matemática – HM. Logo em seguida, com o balizamento teórico originado da Engenharia Didática – ED se indicará um itinerário sistemático para a demarcação do campo epistêmico de interesse. Sem mais delongas, estabelecem-se alguns pressupostos da metodologia de pesquisa.

### 2.1 Metodologia

Como indicado anteriormente, a metodologia de pesquisa, nominada de Engenharia Didática – ED será empregada no sentido de definir, de forma sistemática, o percurso investigativo e técnico, com o escopo de proporcionar o vislumbre de um conjunto de dados, eminentemente teóricos, capazes de proporcionar o alcance dos objetivos indicados anteriormente. Dessa forma, emprega-se um percurso clássico, seguindo as etapas: análises preliminares e análise *a priori* (concepção e descrição das situações didáticas). Observa-se, todavia, que

as demais etapas previstas por uma ED (ARTIGUE, 1996), experimentação e validação da engenharia, não devem ser abordadas ao decurso do trabalho.

### 2.2 Discussão

Com o objetivo de discutir elementos de ordem histórica que possam concorrer em melhor precisão histórica a respeito da origem da fórmula explícita dos termos presentes na sequência de Fibonacci, logo em seguida, aborda-se um contexto histórico evolutivo para a fórmula de Binnet, todavia, outros matemáticos contribuíram no seu avanço significativo.

#### 2.2.1 O contexto histórico: demonstrações da Fórmula de Lamé, ou de Binnet, ou de Moivre?

Registra-se em inúmeros livros de HM (BOLL, 1968; ESTRADA et al., 2000; EVES, 1969; HERZ, 1998; HUNTLEY, 1970; KLEINER, 2012; KRANTZ, 2011; LIVIO, 2002; POSAMENTIER; LEHMANN, 2007; SMITH; BEMAN, 1900; TABAK, 2011; VAJDA, 1989) menção direta aos números de Fibonacci, cuja sequência numérica foi indicada na seção anterior em (\*). Todavia, cabe distinguir uma fórmula implícita para seus termos, que se conhece por  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ , com  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  bem como uma fórmula explícita para os mesmos, descoberta 500 anos depois por Moivre (STILLWELL, 1989) que, em consonância com a literatura especializada, é indicada por  $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$  (\*\*) e nomeada, de modo pouco diligente, em vários livros de HM, por fórmula de Binnet.

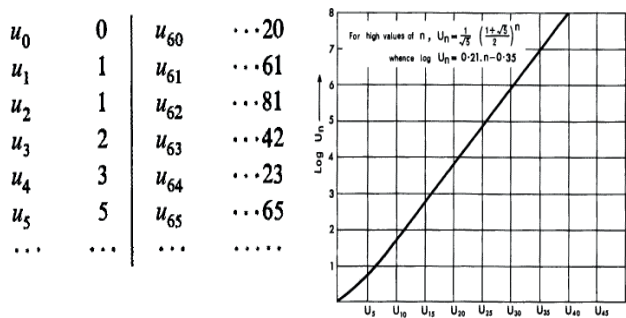
Cabem, entretanto, três atenções ou devidos cuidados, a saber: (i) sua gênese (caráter ontológico); (ii) os modelos matemáticos que validam/referendam a respectiva existência (caráter axiológico) e, (iii) suas possíveis generalizações divulgadas em literatura especializada (caráter lógico-matemático).

No que concerne ao primeiro item, registra-se a predominância dos livros de HM consultados atribuírem a autoria da formulação (\*\*), descoberta pelo matemático francês, em 1843, Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856). Entretanto, Koshy (2011) observa que, já em 1718 era empregada pelo matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754) (TATTERSALL, 2005). Todavia, por intermédio de métodos inovadores, que envolviam o uso de funções geradoras, Koshy (2011) acentua ainda o trabalho independente do matemático e engenheiro francês Gabriel Lamé (1795-1870), no ano de 1844, tendo em vista a obtenção da mesma fórmula. Por outro lado, Posamentier e Lehmann (2007, p.296) esclarecem que: “até mesmo nos dias de hoje, quando um matemático surge com novas ideias, outros hesitam em atribuir o trabalho a determinada pessoa”. A ideologia, assinalada pelos autores pode ser entendida pelo seguinte questionamento: sua ideia parece original, entretanto, como se sabe que não fora, anteriormente, estabelecido algo semelhante ou parecido no passado?

De acordo com tal perspectiva, Posamentier e Lehmann (2007) recordam que Binnet não propôs modificações em sua fórmula logo de início, embora, como já se ressaltou no parágrafo anterior, outros matemáticos como, por exemplo, Nicolaus Bernoulli I (1687-1759) e Daniel Bernoulli (1700-1782), formularam modificações para a fórmula de Binnet. Leonhard Euler (1707-1783) também proporcionou uma contribuição, entretanto, a mesma ficou conhecida como fórmula de Binnet. Diante dessas considerações, depara-se com uma dificuldade de imprecisão histórica, visto que os autores de livros de HM atribuem a este sua autoria.

Para responder o item (ii), busca-se comentar a abordagem utilizada por autores, que empregam estratégias e argumentos formais distintos, tendo como escopo a formulação (\*\*). Neste sentido, Posamentier e Lehmann (2007, p. 298) buscam convencer o leitor, a partir de uma tabela que dispõe o comportamento da seguinte expressão  $(\alpha^n \pm \frac{1}{\alpha^n})$ , para valores  $n \geq 1$ . Os autores assinalam que “nós observamos que eles aparecem, alternativamente, como coeficientes de somas e diferenças de potências de  $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$  e  $1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ”. Seu argumento busca convencer que, como resultado final, teremos números inteiros positivos que se apresentam na lista (\*), embora compareçam os números irracionais  $\alpha = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$  e  $\beta = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$  nas contas! Nesse contexto de preocupação, Huntley (1970) comenta o comportamento da fórmula para índices preliminares (Figura 2) com outros valores, razoavelmente grandes, aparentemente não previstos pelo modelo matemático envolvendo a produção de coelhos (Figura 2).

**Figura 2** – Comparação dos valores assumidos pela SF com índices pequenos e outros, demasiadamente grandes, crescentes, não inteiros



Fonte: Huntley (1970).

Para sua validação, Brousseau (1965), Huntley (1970) e Raji (2015) empregam o modelo de Indução Matemática. Possivelmente, o mesmo recebe a preferência da maior parte dos autores consultados aqui. Já em outro grupo de estudiosos apreciados (AZEVEDO, 1979; FISHER; KOHLBECKER, 1972; KALMAN; MENA, 2003; HOGGAT; VERNNER, 1969), divisou-se uma abordagem matricial, que se apoia em algumas ideias e métodos específicos da Álgebra Linear, tais como, determinação de autovalores, autovetores e a diagonalização de uma matriz de ordem  $2 \times 2$ . A ideia, por

exemplo, que se observa em Azevedo (1979), quando considera as matrizes  $F(n) := \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  para obter que  $\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+2} - \beta^{n+2} \\ \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{pmatrix}$ . Por outro lado, Brousseau (1965) indica ainda que:  $\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . O leitor pode analisar maiores detalhes, inclusive, em outros escritos científicos atuais, como a sua generalização mais recente (KUHAPATANAKUL, 2015).

Ademais, ainda no que concerne a resposta ao item (ii), recorda-se o expediente desenvolvido por Vorobe'v (1961), que envolve uma perspectiva de exploração de noções em Álgebra Linear, todavia, imprime operações abstratas e propriedades de sequências lineares recorrentes de 1ª ordem. Vorobe'v (1961) acentua que todas as sequências da forma  $(c_1 + c_2, c_1\alpha + c_2\beta, c_1\alpha^2 + c_2\beta^2, \dots, c_1\alpha^n + c_2\beta^n, \dots)$  são soluções da relação  $f_{n+1} - f_n - f_{n-1} = 0$  e, uma das particulares, é justamente indicada por aqui em (\*).

Para concluir, a ideia de empregar a noção de função geradora não é registrada em compêndios especializados de HM e foge a ortodoxia usual que se registram nos mesmos (ALVES, 2016). Não obstante, depara-se com a referida estratégia em alguns livros de Teoria dos Números (KOSHY, 2011) e em revistas especializadas. Por fim, a atenção no item (iii) diz respeito ao percurso epistemológico que atesta a evolução do modelo matemático de Leonardo Pisano. A relevância de tal questionamento evidencia-se, posto que, no ensino atual, se mostra imprescindível ao estudante compreender e interpretar a evolução/modificação e a substituição de ideias e dos modelos matemáticos que se tornam obsoletos (ou arcaicos), bem como seu estágio atual evolutivo.

Doravante, enfatizam-se alguns trabalhos que envolvem a definição da sequência original de Fibonacci, para índices inteiros, que são denotados por  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  (ALVES; BORGES NETO, 2011; ALVES, 2015a; 2015b). A referida extensão ao conjunto índices inteiros proporciona a obtenção de propriedades inesperadas (BROUSSEAU, 1965; DE BRUIJN, 1974; HOGGAT; VERNNER, 1969). Por outro lado, aponta-se, ainda, trabalhos que descrevem a forma trigonométrica para fórmula apresentada em (\*\*) (DE BRUIJN, 1974), bem como a descrição da Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF (HOGGAT; VERNNER, 1969; WADDILL; SACKS, 1967). Na próxima seção são trazidos ao leitor maiores detalhes sobre essa matéria.

**2.2.2 A generalização do modelo: a Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF**

Discute-se um terreno de pouca precisão, no que concerne ao ato de atribuir a descoberta de uma fórmula ou propriedade a determinado matemático. Não obstante, embora se possa constatar a dificuldade em se conferir a um único matemático a fórmula enunciada, geralmente, nos compêndios de HM, por fórmula de Binet, nesta seção, traz-se ao leitor determinados aspectos matemáticos largamente publicizados em alguns artigos, mormente, àqueles das décadas de 1960 e 1970, que

abordam sua correspondente generalização. Tal elemento evidencia o processo evolutivo não estático do modelo de produção dos coelhos (Figuras 1 e 2).

Preliminarmente, recordou-se que Alves e Borges Neto (2011) discutem a preocupação didática de exploração da sequência estendida de Fibonacci. Não obstante, a possibilidade de sua extensão não é recente. Com efeito, em um trabalho da década de 1960, Hoggat e Vernner (1969) expressam a generalização do modelo, inclusive para a sequência de Lucas, que se exprime, também, a partir dos termos da SF. Assinala-se, todavia, que no universo de possibilidades de generalização da SF, restringir-se-á àquele relativo ao descrito em (\*\*). Com origem na Figura 3, pode-se adotar a seguinte simbologia  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

**Figura 3** - Descrição de ambas as sequências numéricas  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  e  $(L_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  no campo dos inteiros

...	$F_{-4}$	$F_{-3}$	$F_{-2}$	$F_{-1}$	$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	...
...	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	...
...	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	...
...	$L_{-4}$	$L_{-3}$	$L_{-2}$	$L_{-1}$	$L_0$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	...

Fonte: Hoggat e Vernner (1969)

Outro componente merecedor de atenção diz respeito ao fato de que, quando se apoia na regra de recorrência  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , pode-se, facilmente, descrever os termos indicados em (\*), todavia, não se consegue efetuar sua previsão, para índices consideravelmente grandes (ver figura 2, ao lado direito). Em um sentido contrário, quando se apoia na fórmula (\*\*), tem-se a possibilidade de avaliar qualquer índice, sem apelar aos dois termos anteriores, não obstante, como convencer o estudante de que expressões intrincadas, do tipo  $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$  ou  $f_n = \frac{\alpha^{2n} - \cos(n\pi) + i \operatorname{sen}(n\pi)}{(\alpha - \beta) \cdot \alpha^n}$  (DE BRUIJN, 1974) podem conduzir, precisamente, aos valores listados em (\*)? Tal questionamento (que envolve a determinação/identificação do problema) conduz à descrição de uma Engenharia Didática – ED, tendo em vista a obtenção (e acúmulo) de conhecimentos científicos, didáticos e metodológicos sobre o respectivo assunto de interesse (DOUADY, 1993).

### 2.2.3 A Engenharia Didática – ED

Almouloud e Coutinho (2008) declaram que formular um problema consiste em explicar, de maneira clara, compreensível e operacional, qual a dificuldade com a qual se defronta e que se pretende resolver, limitando o seu campo e apresentando suas características. Desse modo, com origem nas argumentações discutidas anteriormente, indica-se o seguinte problema: a fórmula que proporciona uma descrição explícita  $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$  ou  $f_n = \frac{\alpha^{2n} - \cos(n\pi) + i \operatorname{sen}(n\pi)}{(\alpha - \beta) \cdot \alpha^n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  dos termos da SF produz entraves ao entendimento dos aprendizes, no que concerne sua correlação com a lista (\*).

Apesar de não constituir o objetivo a discussão de uma Engenharia Didática (MARGOLINAS, 2005), mas, tão

somente, sua descrição, vale comentar que os pressupostos de uma ED se mostram intimamente vinculados com um quadro de referências metodológicas e possibilitam a predição/descrição, replicação e a modelização de fenômenos didáticos-metodológicos (ARTIGUE, 1984)

Nesse sentido, Artigue (1996, p. 265) comenta:

A Engenharia Didática coloca problemas de natureza nova, pois, de um lado, a realização experimental supõe, ela mesma, uma espécie de transmissão em direção aos aprendizes, que devem ser os atores e, por outro lado, como quadro de metodologias externas, não podemos importar facilmente o ‘sentido’ de reprodução de outros campos científicos específicos.

As ponderações de Artigue (1996) se mostram alvissareiras, posto que apontam um campo epistêmico específico em foco, intimamente relacionado e condicionado por um conhecimento matemático particular, objeto de interesse para um determinado projeto de engenharia. Por outro lado, tendo em vista as relações em torno do conhecimento matemático de interesse, constata-se que “ao decurso das mudanças entre professor e alunos, o projeto evolui, ao sabor da reação dos estudantes e em função das escolhas do professor”. Dessa forma, uma investigação afetada pelos pressupostos da ED pode ser concebida como um “produto”, pois é “o resultado de uma análise *a priori*” e um “processo”, como consequência de “uma adaptação pela colocação em uso do produto relativamente às condições dinâmicas da classe” (DOUADY, 1995, p.2).

Tendo em vista as características do modelo matemático que se busca investigar, adota-se percurso semelhante aos estudos de Alves (2014, 2016), visto que, em seu trabalho, encontra-se a descrição, apenas, nas duas etapas preliminares da Engenharia Didática – ED. Com um pensamento semelhante, apresenta-se um modelo matemático relativamente desconhecido (publicizado em apenas periódicos especializados) em um contexto de graduação em Matemática, que envolve o público de interesse. Por outro lado, recorda-se o pensamento de Douady (1993, p.3) ao assinalar que “todo o trabalho de construção, análise e previsão, repousa sobre um questionamento didático”.

Doravante, tendo em vista a formulação de uma resposta, ao menos provisória, para o questionamento anterior, passa-se a abordar a etapa inicial de uma ED.

### 2.2.4 Análises preliminares

Dois elementos devem ser evidenciados nessa etapa, de acordo com Almouloud (2007), a saber: (i) estudo da organização matemática; (ii) análise didática do objeto matemático escolhido. De modo específico, concernente ao item (i), se atem ao: estudo da gênese histórica envolvendo o surgimento da fórmula (\*\*); sua funcionalidade atual na Matemática (limitações e possibilidades para o uso didático, que serão detalhados no próximo segmento); obstáculos epistemológicos relacionados com a noção de SF; a estrutura



atual da abordagem de conteúdos relacionados com a SF e a SGF, bem como seus efeitos, tendo em vista o ensino no *locus* acadêmico, com o amparo da Teoria das Situações Didáticas – TSD (BROUSSEAU, 1986, 1994).

Relativo ao item (ii) se aponta a relevância da análise de livros de HM. Uma análise de livros de HM, tendo em vista a abordagem da fórmula (\*\*), não pode prescindir de considerar: o papel da história da SF e da SGF; os obstáculos epistemológicos identificáveis na abordagem dos autores; antever/prever as possíveis concepções inadequadas dos alunos (dimensão cognitiva), oriundas a partir da abordagem proposta. Desse modo, conclui-se: os autores de livros de HM consultados, desconsideram as possibilidades de evolução e generalização do referido modelo, tendo em vista que se restringem ao quadro que caracteriza a geração de coelhos, segundo a relação  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ , com  $n \geq 1$  e pode ser vislumbrado seu apelo lúdico na figura 1. E, diante deste entrave, apresenta-se a seguinte hipótese de investigação.

Hipótese de Investigação: de modo geral, os estudantes manifestam dificuldade em associar/vincular a expressão envolvendo números racionais presentes na fórmula de Binnet ou de Lamé ou de De Moivre com os números inteiros obtidos pela fórmula implícita e indicados em (\*).

A formulação da hipótese anterior se consubstancia, a partir de considerações de autores como Posamentier e Lehmann (2007), que investigam o comportamento dos dígitos e sua ocorrência na SF e, assinalam ainda o caráter surpreendente de, apesar de expresso por intermédio de potências do número  $\sqrt{5}$  parecem desaparecer, conduzindo sempre aos números naturais, para índices apenas naturais. Não obstante, não se tem a pretensão aqui em responder (confirmar ou refutar) (ALMOULOU; COUTINHO, 2008), de modo empírico, qualquer objetivo de pesquisa a ser formulada com origem em questão de investigação que foi indicada na introdução.

## 2.2.5 Construção e concepção das situações

Nessa fase de ED são elaboradas e analisadas uma sequência de situações-problema envolvendo a fórmula (\*\*). Respondem-se algumas questões indicadas nas sessões anteriores, todavia, não se enseja validar aqui qualquer hipótese de investigação. Para efeito de maior sistematização, assume-se que uma situação-problema não pode prescindir “da escolha de questões abertas e/ou fechadas em uma situação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber” (ALMOULOU, 2007, p.174). Vale observar que, no campo de saberes referenciados por Almouloud (2007), é possível, tendo em vista o nível elementar da Matemática, considerar situações “menos matematizadas”. Entretanto, nesse caso, o modelo matemático condicional/determina, fortemente, todas as estratégias e as ações e decisões dos aprendizes.

Logo em seguida, são trazidas duas situações-problema que, com o arrimo na perspectiva de Almouloud (2007)

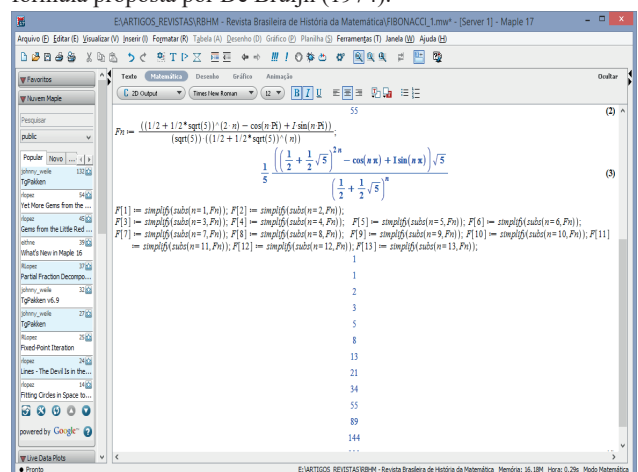
detêm como finalidade responder questões e validar hipóteses levantadas na fase anterior. Por outro lado, as seguintes características (BROUSSEAU, 1986) devem ser buscadas: os alunos devem compreender o problema e, a mesma possibilidade de engajamento dos mesmos; as situações-problema colocam em jogo o campo conceitual almejado; os problemas envolvem vários domínios de conhecimento e os métodos de resolução conhecidos não são suficientes. Acrescenta-se ainda que “com seus conhecimentos, os alunos não conseguem resolver completamente a situação” (DOUADY, 1993, p.26), dessa forma, a ação/mediação direta do professor se torna, em determinado momento, imprescindível ao decurso das fases dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização (DOUADY, 1995).

No rol de detalhamento, exposto por Almouloud (2007), acentuam-se os seguintes objetivos: auxiliar o aluno na construção de conhecimento e saberes relacionados com a SGF e outras maneiras de representar a fórmula (\*\*); aumentar o grau de familiaridade com certos modelos matemáticos, inclusive, com recurso computacional.

Situação-problema 1: A seguinte fórmula analítica trigonométrica  $f_n = \frac{\alpha^{2n} - \cos(n\pi) + i \operatorname{sen}(n\pi)}{(\alpha - \beta) \cdot \alpha^n}$  (DE BRUIJN, 1974), com  $n$  um número inteiro, se relaciona com a listagem (\*), que designa a evolução dos casais de coelhos?

Situação de ação. Assume-se como pressuposto que “a constituição do sentido, tal como se entende, implica em uma interação constante dos alunos com situações problemáticas, interações dialéticas (caso o sujeito antecipe, finalize suas ações) [...]” (BROUSSEAU, 1986, p.117). Assim, de modo preliminar, os alunos manifestam uma ação em situação, na condição em que a situação problema manifeste um sentido e desperta o interesse dos mesmos.

**Figura 4** - Com o recurso computacional, pode-se convencer o solucionador de problemas, quanto aos primeiros termos da fórmula proposta por De Bruijn (1974).



Fonte: O autor.

Na Figura 4, com auxílio computacional, especificamente o uso do CAS Maple, exploramos uma sintaxe específica, não necessariamente de domínio do grupo de estudantes,



$$f_{-3} = \frac{\alpha^{-6} - \cos(-3\pi) + isen(-3\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{-3}} = \frac{(\alpha^{-6} + 1)}{(\alpha - \beta)\alpha^{-3}} = \frac{(\alpha^{-2})^3 + 1}{(\alpha^{-2} + 1)(\alpha^{-4} - \alpha^{-2} + 1)} = \frac{(\alpha^{-2} + 1)(\alpha^{-4} - \alpha^{-2} + 1)}{(\alpha^{-2} + 1)(\alpha^{-4} - \alpha^{-2} + 1)} = \frac{(\alpha^{-4} - \alpha^{-2} + 1)}{(\alpha^{-2} + \alpha^{-4})} = \frac{(\alpha^{-2} - 1)(\alpha^{-2} + 1)}{\alpha^{-2}(1 + \alpha^{-2})} = \frac{(\alpha^{-2} - 1)(\alpha^{-2} + 1)}{\alpha^{-2}(\alpha^{-2} + 1)} = \frac{\alpha^{-2} - 1}{\alpha^{-2}} = 2$$

Em seguida, com referência nas seguintes identidades

$$(\alpha^{-2} - 1)^2 = \alpha^{-4} - 2\alpha^{-2} + 1 \rightarrow \alpha^{-4} + 1 = (\alpha^{-2} - 1)^2 + 2\alpha^{-2}$$

, estabelece-se:

$$f_{-4} = \frac{\alpha^{-8} - \cos(-4\pi) + isen(-4\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{-4}} = \frac{(\alpha^{-8} + 1)}{(\alpha - \beta)\alpha^{-4}} = \frac{(\alpha^{-4})^2 + 1}{(\alpha^{-4} + 1)(\alpha^{-4} - 1)} = \frac{(\alpha^{-4} + 1)(\alpha^{-4} + 1)}{(\alpha^{-4} + 1)(\alpha^{-4} - 1)} = \frac{(\alpha^{-4} + 1)}{(\alpha^{-4} - 1)} = \frac{(\alpha^{-2} - 1)(\alpha^{-2} + 1)}{(\alpha^{-2} - 1)(\alpha^{-2} + 1)} = \frac{(\alpha^{-2} - 1)(\alpha^{-2} + 1)}{\alpha^{-2}(\alpha^{-2} + 1)} = \frac{\alpha^{-2} - 1}{\alpha^{-2}} = -3$$

Situação de validação. Ora, nesse momento, os alunos

podem confrontar as propriedades extraídas da fórmula trigonométrica:  $f_{-1} = (-1)^{1+1} f_1$ ,  $f_{-2} = (-1)^{2+1} f_2$

,  $f_{-3} = (-1)^{3+1} f_3$  e  $f_{-4} = (-1)^{4+1} f_4$ . Com isso, conjecturar que  $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ .

Com origem nessas relações, instigar conjecturas relativas ao processo de generalização do modelo trigonométrico da SGF, pelo uso do modelo de Indução Matemática (DE BRUIJN, 1974, p. 255). Com efeito, observa-se:

$$f_{n-1} = \frac{\alpha^{2n-2} - \cos((n-1)\pi) + isen((n-1)\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n-1}} = \frac{\alpha^{2n-2} - \cos(n\pi) - isen(n\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n-1}}$$

$$e \quad f_{n+1} = \frac{\alpha^{2n+2} - \cos(n+1\pi) + isen(n+1\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n+1}}$$

Segue que:  $f_n + f_{n-1} = f_{n+1} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \frac{\alpha^{2n} - \cos(n\pi) + isen(n\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^n} + \frac{\alpha^{2n-2} + \cos(n\pi) - isen(n\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n-1}} = \frac{\alpha^{2n+2} - \cos(n+1\pi) + isen(n+1\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n+1}}$$

$$\leftrightarrow \frac{\alpha^{2n+1} - \alpha \cos(n\pi) + \alpha isen(n\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n+1}} + \frac{\alpha^{2n} + \alpha^2 \cos(n\pi) - \alpha^2 isen(n\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n+1}} = \frac{\alpha^{2n+2} + \cos(n\pi) - isen(n\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n+1}}$$

$$\leftrightarrow \frac{\alpha^{2n+1} - \alpha \cos(n\pi) + \alpha isen(n\pi) + \alpha^{2n} + \alpha^2 \cos(n\pi) - \alpha^2 isen(n\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n+1}} = \frac{\alpha^{2n+2} + \cos(n\pi) - isen(n\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n+1}}$$

$$\leftrightarrow \frac{\alpha^{2n}(1 + \alpha) - \cos(n\pi)(\alpha^2 - \alpha) + \alpha isen(n\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n+1}} = \frac{\alpha^{2n+2} + \cos(n\pi) - isen(n\pi)}{(\alpha - \beta)\alpha^{n+1}} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \alpha^{2n}(1 + \alpha) - \cos(n\pi)(\alpha^2 - \alpha) + \alpha isen(n\pi) = \alpha^{2n+2} + \cos(n\pi) - isen(n\pi) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \alpha^{2n}\alpha^2 - \cos(n\pi)(\alpha^2 - \alpha) + \alpha isen(n\pi) = \alpha^{2n+2} + \cos(n\pi) - isen(n\pi) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow -\cos(n\pi)(\alpha^2 - \alpha) - \cos(n\pi) = 0 \leftrightarrow \cos(n\pi)(1 - \alpha - \alpha^2) = 0$$

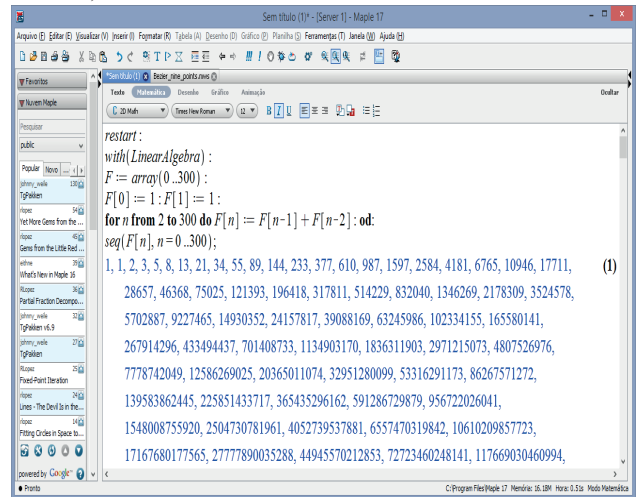
A última inferência é assegurada, tendo em vista que se sabe que  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  é raiz da equação  $x^2 - x - 1 = 0$ . Como se pode observar, na fase de validação, o professor estimula um debate sobre a “certeza das asserções” (ALMOULOU, 2007) e, nesse caso, o modelo de Indução Matemática foi empregado/sugerido no sentido de verificar a validade das propriedades. Veja-se, agora, o segundo problema.

Situação-problema 2: Com origem na fórmula  $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , e recurso ao CAS Maple, apresenta-se extensa listagem na figura 5. Não obstante, na mesma, divisa-se o quociente  $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$  entre dois números irracionais e, desse modo, se poderia suspeitar que o resultado final conduziria a outro número irracional. Tendo em vista isso, pode-se confiar na listagem abaixo fornecida pelo software, posto que não se divisa nenhum número irracional?

Situação de ação. Na Figura 6, os estudantes podem desenvolver uma atividade apreciativa da extensa listagem. Uma concepção que se tenta mobilizar diz respeito ao fato de que, geralmente, não se questiona a precisão do aparato matemático e, em certa medida, a confiabilidade no modelo matemático computacional. Desse modo, os alunos precisam tomar decisões (BROUSSEAU, 1986), tendo em vista novas

descobertas.

Figura 6 - Com o CAS Maple se tem a possibilidade de obter extensa listagem de termos a partir da fórmula (\*\*\*) (elaboração do autor)



Fonte: O autor

Nesse caso, os estudantes podem observar que  $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1\sqrt{5} = f_1\sqrt{5}$ . E, do mesmo modo, nota-se  $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} = 1\sqrt{5} = f_2\sqrt{5}$ . E, ainda que:

$$\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = 2\sqrt{5} = f_3\sqrt{5} \quad \alpha^4 - \frac{1}{\alpha^4} = 3\sqrt{5} = f_4\sqrt{5}$$

O argumento anterior se resume em efetuar a divisão por  $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ , para determinar os valores de interesse. Outras expressões são fornecidas por Posamentier e Lehmann (2007).

No que concerne aos símbolos avaliados por tais autores, restringir-se-á ao caso da SF e se considera o caso da Sequência de Lucas, denotada abaixo por  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Na mesma, quando se divide por  $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ , deve-se determinar os valores listados em (\*). Registra-se, todavia, que as simplificações empregadas na Figura 7, bem como as outras que foram discutidas na primeira situação, envolvem um processo matemático chamado de linearização, utilizado desde Euler, o qual deve ser tornado familiar aos estudantes. De fato, o processo envolvendo a substituição de potências das raízes do tipo  $\alpha^n$  ou  $\beta^n$  por fatores lineares era conhecido por Leonhard Euler (WALSER, 2001).

A ideia envolve considerar as duas raízes da equação polinomial  $x^2 = x + 1$ , dadas por  $\alpha$  e  $\beta$ , e reduzir, progressivamente, as potências das mesmas.

**Figura 7** - Posamentier e Lehmann formulam os seguintes padrões oriundos a expressão presente em (\*).

$n$	Sum	Difference
1	$\phi + \frac{1}{\phi} = 1\sqrt{5} = F_1\sqrt{5}$	$\phi - \frac{1}{\phi} = 1 = L_1$
2	$\phi^2 + \frac{1}{\phi^2} = 3 = L_2$	$\phi^2 - \frac{1}{\phi^2} = 1\sqrt{5} = F_2\sqrt{5}$
3	$\phi^3 + \frac{1}{\phi^3} = 2\sqrt{5} = F_3\sqrt{5}$	$\phi^3 - \frac{1}{\phi^3} = 4 = L_3$
4	$\phi^4 + \frac{1}{\phi^4} = 7 = L_4$	$\phi^4 - \frac{1}{\phi^4} = 3\sqrt{5} = F_4\sqrt{5}$
5	$\phi^5 + \frac{1}{\phi^5} = 5\sqrt{5} = F_5\sqrt{5}$	$\phi^5 - \frac{1}{\phi^5} = 11 = L_5$
6	$\phi^6 + \frac{1}{\phi^6} = 18 = L_6$	$\phi^6 - \frac{1}{\phi^6} = 8\sqrt{5} = F_6\sqrt{5}$
7	$\phi^7 + \frac{1}{\phi^7} = 13\sqrt{5} = F_7\sqrt{5}$	$\phi^7 - \frac{1}{\phi^7} = 29 = L_7$
8	$\phi^8 + \frac{1}{\phi^8} = 47 = L_8$	$\phi^8 - \frac{1}{\phi^8} = 21\sqrt{5} = F_8\sqrt{5}$
9	$\phi^9 + \frac{1}{\phi^9} = 34\sqrt{5} = F_9\sqrt{5}$	$\phi^9 - \frac{1}{\phi^9} = 76 = L_9$
10	$\phi^{10} + \frac{1}{\phi^{10}} = 123 = L_{10}$	$\phi^{10} - \frac{1}{\phi^{10}} = 55\sqrt{5} = F_{10}\sqrt{5}$

Fonte: Posamentier e Lehmann (2007)

Situação de formulação. Agora, as relações e significados matemáticos devem ser depurados, na medida em que uma linguagem compreensível por todos deve ser mobilizada (ALMOULOU, 2007). Assim, com auxílio na Figura 8 se estabelece um contraponto entre o modelo discutido por De Bruijn (1974), há algumas décadas atrás, que possibilita avaliar a sequência de Fibonacci original, com índices reais, com a obtenção de números complexos, tais como os indicados logo abaixo, por  $f_{\frac{1}{2}}$ ,  $f_{-1\frac{1}{2}}$ ,  $f_{2\frac{1}{2}}$ . Com a mesma ideia, ao lado direito, são exibidos alguns valores, em termos de números complexos, determinados pelo CAS Maple. Um sistema simbólico notacional deve ser empregado.

**Figura 8** - Ao lado esquerdo, De Bruijn (1974) avalia números de Fibonacci para números irracionais e, ao lado direito, traz-se o cálculo algébrico proporcionado pelo CAS Maple

Fonte: Adaptado de De Bruijn (1974).

Cabe observar que o cálculo algébrico do *software* não produz, em certos casos, as simplificações necessárias. Nesse sentido, na Figura 7 se divisa, por exemplo, o valor  $f_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{10} \frac{(i\sqrt{5} - 2 + i)\sqrt{5}\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5+i}}$ , que exige algumas simplificações, até a forma *standard*  $a + ib$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dados como esses produzem mudanças de concepções dos estudantes relativamente ao caráter ubíquo da SF (ALVES, 2013), tendo em vista a comparação com a lista que foi apresentada em (\*) e seus novos valores assumidos aqui.

Ademais, observa-se que o modelo de Indução Matemática, que garante sua validade, todavia, não garante a existência ou equivalência de ambas as descrições de fórmulas explícitas dos termos da SF, entretanto pode assumir o papel de institucionalização dos saberes matemáticos, ocasião em que o investigador se aproprie de uma metodologia de ensino integrada ao arcabouço proporcionado pela ED, como a Teoria

das Situações Didáticas – TSD (BROUSSEAU, 1986).

Situação de validação. Com a intenção do encerramento do debate científico entre os estudantes, oriundo das duas situações-problema, enuncia-se um teorema, que indicará uma generalização ainda mais poderosa da fórmula que foi discutida e se adquire maior entendimento de suas propriedades analíticas e numéricas. E, concluindo, todos os dados coligidos e produzidos a partir das interações da tríade alunos – saber – professor.

Situação de institucionalização. Almouloud (2007, p.40) esclarece que “uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio da classe embora não tenha ainda o estatuto de saber social”. Desse modo, tendo em vista tornar oficial determinado saber e indicar a relevância de incorporá-lo ao patrimônio cultural da classe se promove uma discussão em torno de todos os dados produzidos e discutidos pelo grupo, em ambas as situações didáticas. Por



fim, um teorema, pouco encontrado nos livros de HM, que deverá ser incorporado ao patrimônio cultural da turma pode ser constatado no teorema.

Teorema: Dado  $x \in \mathbb{R}$ , e uma função que satisfaz  $f(x+1) = -f(x)$ . Então, verifica-se a relação fundamental  $F_{x+2} = F_{x+1} + F_x$ , aonde  $F_x = \frac{\alpha^x - f(x) \cdot \alpha^{-x}}{\sqrt{5}}$  e, tal função  $f$  goza da propriedade  $f(n) = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ . (FILIPPONI, 1993).

A verificação da ilação contida no teorema acima ultrapassa os limites de discussão da presente proposta, todavia, sugere-se ao leitor mais interessado o estudo de sua demonstração formal, no intuito de perspectivar a evolução, ainda atual, do modelo aqui abordado e, teoricamente pensado para ser aplicado em sala de aula, em uma turma de graduação em Matemática.

Para concluir, busca-se descrever as etapas iniciais de um ED, levando em consideração um problema relacionado com a descrição explícita dos termos que se apresentam na SF. De modo preliminar, constata-se, nos livros de HM, a desconsideração da evolução do referido modelo que, em sua origem, evoluiu a partir de um modelo idealizado para a reprodução de “coelhos imortais” (Figura 1), envolvendo um modelo proposto por Leonardo Pisano (SIGLER, 2003).

Das situações problema que se discutiram aqui, cabe recordar algumas considerações de De Bruijn (1974), quando especula a possibilidade de determinação do valor de  $f_{1/2} = \frac{\alpha^{1/2} - \beta^{1/2}}{\alpha - \beta}$ . Aqui, o único entrave, comentado por este autor, resulta na necessidade de se avaliar  $\beta^{1/2} = \sqrt{\beta}$ , posto que  $\beta < 0$ . Por outro lado, consegue-se êxito na determinação do mesmo e outros valores, quando se recorre ao CAS Maple (Figura 7), e se faz a apropriação da tecnologia atual.

Nos exemplos passados foram mostrados determinados elementos que dificultam a produção de novos saberes aos estudantes, mormente, àqueles que envolvem a descrição de grandes valores, correspondentes ao aumento progressivo dos índices dos números  $f_n$ , extrapolando o campo dos inteiros. Nessa circunstância, o emprego do CAS Maple pode ser fundamental, no intuito de potencializar um possível momento de convencimento dos estudantes, quanto à natureza da formulação trigonométrica e o estímulo de conjecturas sobre a mesma (bem como outras descrições). Ademais, com origem nesses exemplos se tem a possibilidade de evitar a evolução de concepções inadequadas sobre o teorema de Binnet ou de Lamé, ou ainda de De Moivre (Figura 5), tendo em vista as observações produzidas por Posamentier e Lehmann (2007) e Koshy (2007).

Para concluir, assume-se posição concorde com Artigue (1998, p. 3), quando recorda que “os problemas que motivaram a introdução de um certo conceito, como os mesmos que governam sua evolução são constitutivos da significação do próprio conceito e que, o didático, em sua análise, se confronta, necessariamente, com tais problemas e sua significação”. Nesse tema discutido por intermédio de uma proposta de ED,

se realizam análises e são considerados elementos de uma análise epistemológica (ARTIGUE, 1998) concernentes a um problema relacionado ao modelo de Sequência Generalizada de Fibonacci - SGF, todavia, de divulgação restrita em artigos de periódicos especializados (FILIPPONI, 1972; FISHER; KOHLBECKER, 1972; GOOD, 1993; LEHMER, 1966; HORADAM, 1965; PARKER, 1968; SPICKNERMAN, 1982; WADDILL; SACKS, 1967).

Acentua-se ainda perspectiva semelhante ao que Brousseau (1986, p. 431), quando assinala a importância de didática de explorar, em sala de aula, a concepção de que um teorema nem sempre é verdadeiro, no âmbito de sua evolução histórico-matemática. Nesse contexto foram trazidas propriedades relativamente desconhecidas para o *locus* acadêmico, que se inserem em um ambiente de investigação histórica, diante da possibilidade de se produzir sensação de incerteza, na medida em que se exploram índices que extrapolam o campo dos inteiros positivos (ALVES; BORGES NETO, 2011), e produzem um descolamento do modelo lúdico que foram significados por meio da Figura 1.

Vale assinalar que, em ambas as situações discutidas nas seções anteriores, buscou-se apontar/identificar elementos que permitem: um meio de controle e previsão da ação dos estudantes, um meio de comunicação por meio de linguagem materna, matemática e matemático-computacional, um meio de verificação formal e prova e, por fim, um saber e algoritmo de referência (BROUSSEAU, 1996). Artigue (2013, p.5) acentua a relevância de atividades conceituais amparadas pelo uso do CAS no ensino de Matemática. A autora acentua sua funcionalidade pragmática, na medida em que produz resultados e sua funcionalidade epistêmica, posto que “contribui para a compreensão dos objetos matemáticos”. Ora, no que concerne ao recurso ao CAS, assinala-se sua potencialidade em avaliar expressões analíticas intrincadas e proporcionar a descrição de grandes listagens de valores numéricos de interesse. Sua função atua no sentido do convencimento (funcionalidade epistêmica) dos aprendizes na predição do modelo (\*\*), para valores grandes dos índices  $n$  e não inteiros e, com isso se tem a possibilidade de “modificar o equilíbrio cultural sobre certos conceitos matemáticos”.

Por fim, foram recordadas as considerações de Artigue (2012, p.16), ao comentar que “nós não alcançaremos êxito sem uma pesquisa de qualidade, que considera as diversidades da área, mas, também, capaz de formular claramente seus avanços e indicar de que modo isso se presta à Educação Matemática”. E, nesse contexto, recorda-se a relevância de proporcionar uma boa formação do professor, com amparo, ainda, em metodologias qualitativas e quantitativas (ALMOULOU; COUTINHO, 2008), imbuído de um olhar investigativo.

Decerto que a discussão permite e sugere a apropriação, por parte do profissional que atua em um *locus* acadêmico, tendo como arrimo uma perspectiva de exploração didática sistematizada e afetada pela ED, tendo como escopo final a

experimentação e a aplicação (fase de experimentação) do aparato teórico que foi descrito nas fases preliminares e *a priori*, incluindo aí a concepção das situações (ALMOULOU, 2007). E, assim, a perspectiva de mediação deve proporcionar a elaboração de conhecimentos didáticos e metodológicos sobre a fórmula de Lamé, Binnet ou de De Moivre.

### 3 Conclusão

Ao decurso do presente trabalho foi desenvolvida uma discussão, fortemente demarcada pelo campo epistêmico, intrinsecamente condicionada pela natureza intrínseca dos conhecimentos matemáticos, com ênfase aos seus aspectos históricos, matemáticos e evolutivos. De modo particular, o vigor indene da sequência de Fibonacci, inclusive sua forma generalizada, confirma um progresso evolutivo irrefreável e vigoroso.

De modo particular, embora não receba a devida atenção por parte dos autores de livros de HM, a fórmula de Binnet, ou de Lamé ou de De Moivre representa um exemplo genuíno de uma forma de generalização e de propriedades e representações diferenciadas que confirmam outros elementos matemáticos que requerem a atenção por parte do professor de Matemática, que manifesta um interesse precípuo pela abordagem histórico-matemática.

Finalmente, tendo em vista um percurso investigativo previsto por uma ED, averiguou-se um processo descritivo de situações didáticas, envolvendo múltiplas representações para a fórmula de Binnet, ou de Lamé ou de De Moivre, com ênfase ao seu aspecto trigonométrico. Isso posto, a presente proposta de ED, restrita aos dois primeiros momentos (análise preliminar e *a priori*), possibilita a aquisição de uma cultura matemática por parte do professor que, de modo geral, se mostra desconsiderado por parte dos autores de livros de História da Matemática.

### Referências

ALMOULOU, S.; COUTINHO, C.Q.S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *REVEMAT – Rev. Eletr. Educ. Matem.*, v.3, n.1, p.6-77, 2008.

ALMOULOU, S. *Fundamentos da didática da matemática*. São Paulo: UFPR, 2007.

ALVES, F.R.V. Fórmula de de Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci – SGF. *Rev. Bras. Hist. Matem.*, v.17, n.33, p.1-16, 2017.

ALVES, F.R.V. Engenharia Didática para a generalização da Sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. *Educ. Matem. Pesq.*, v.18, n.1, p.61-93, 2016.

ALVES, F.R.V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci – FHF. *VYDIA Educ.*, v.35, n.1, p.133-148, 2015a.

ALVES, F.R.V. Sequência Generalizada de Fibonacci e relações com o número de ouro. *Bol. Cearense Educ. Hist. Matem.*, v.6, p.1-4, 2015b.

ALVES, F.R.V. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e análise *a priori*. *Rev. Bras. Ensino Ciênc. Tecnol.*, v.7, n.3, p.148-168, 2014.

ALVES, F.R.V. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da sequência de Fibonacci apoiada na tecnologia. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, p. 1 – 15, 2013.

ALVES, F.R.V.; BORGES NETO, H. A existência da Sequência de Fibonacci no campo dos Inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. *Bol. GEPEN*, v.1, n.53, p.135-140, 2011.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactiques. In: BRUN, J. *Didactiques de Mathématiques*. LAGRANGE, J.B. Reims, 2003. p.243-264.

ARTIGUE, M. Épistemologie et Didactiques. *Cahiers des Didactiques de Mathématiques*, n.3, p.1-33, 1989.

ARTIGUE, M. Modélisation et reproductibilité en Didactique des Mathématiques. *Les Cahiers Rouge*, 1-22. 1984.

ARTIGUE, M. L'Éducation Mathématique et comme champ de Recherche et champ de pratiques. *Em Teia Rev. Educ. Matem. Technol. Iberoam.*, v.3, n.3, p.1-20, 2012.

ARTIGUE, M. L'Éducation Mathématique et comme champ de Recherche et champ de pratiques. *Em Teia Rev. Educação Matem. Technol. Iberoam.*, v.4, n.1, p.1-14, 2013.

AZEVEDO, A.J.C. Fibonacci numbers. *Fibonacci Quarterly*, v.17, n.2, p.162-165, 1979.

BOLL, M. *Histoire de Mathématiques*. Paris: Universitaire de France, 1968.

BROUSSEAU, B.A. An introduction to Fibonacci Discovery. Fibonacci Association, 1965.

BROUSSEAU, G. *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Bourdeaux: Université Bordeaux I, 1986.

BROUSSEAU, G. Perspective pour la didactique des mathématiques: vingt ans de didactique des mathématiques en France. Paris: La Pensée Sauvage, 1994.

DE BRUIJN, P.J. An extension of fibonacci's sequence. *Fibonacci Quarterly*, v.12, n.3, p.251-259, 1974.

DOUADY, R. L'ingénierie didactiques. *Les Cahier Rouge des Didactiques des Mathématiques*, v.19, n.1, p.1-52, 1993.

DOUADY, R. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. In: GOMEZ, P. Ingeniería didáctica en educación matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995. p. 1-22.

ESTRADA, M.F.S. et al. *História da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

EVES, H. *An introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Hinehart and Winston, 1969.

FILIPPONI, P. Real Fibonacci ans Lucas numbers with real subscripts. *Fibonacci Quarterly*, v.31, n.4, p.307-315, 1972.

FISHER, P.S.; KOHLBECKER, E.E. A generalized Fibonacci Sequence. *Fibonacci Quarterly*, v.10, n.4, p.337-344, 1972.

GOOD, I.J. Complex Fibonacci and Lucas numbers, continued fractions and the square root of Golden ratio. *Fibonacci Quarterly*, v.31, n.1, p.7-21, 1993.

GULLBERG, J. *Mathematics: from the birth of numbers*. New York: W.W. Norton & Company, 1997.

HERZ, F.R. *A mathematical history of Golden Number*. New York: Dover, 1998.

- HOGGAT, J.; VERNNER, J. Fibonacci and Lucas Numbers. The Fibonacci Association. Santa Clara: University of Santa Clara, 1969.
- HOGGAT, J.; BICKNELL, M. Roots of Fibonacci Polynomials. *Fibonacci Quarterly*, v.11, n.3, p.271-274, 1973.
- HORADAM, A.F. Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. *Fibonacci Quarterly*, v.3, n.3, p.161-176, 1965.
- HUNTLEY, H.E. *The divine proportion: a study in mathematical beauty*. New York: Dover Publications, 1970.
- KALMAN, D.; MENA, R. The Fibonacci numbers: exposed. *Mathematics Magazine*, v.76, n.3, p.167-180, 2003.
- KLEINER, I. *Excursions in the history of mathematics*. New York: Springer, 2012.
- KOSHY, Thomas. *Catalan Numbers with application*. Oxford: Oxford University Press, 2007.
- KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas numbers and applications*. New York: John Willey and Sons, 2011.
- KUHAPATANAKUL, K. The Lucas p-matrix. *Int. J. Mathem. Educ. Sci. Technol.*, v.46, n.6, p.2-7, 2015.
- KRANTZ, S.G. *The proof is in the Pudding: the changing nature of the mathematical proof*. New York: Springer, 2011.
- LEHMER, E. On the Quadratic Character of the Fibonacci Root. *Fibonacci Quarterly*, v.4, n.2, p.135-139, 1966.
- LIVIO, M. *The Golden Ratio: the history of Phi*. New York: Broadway Books, 2002.
- MARGOLINAS, C. Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue Suisse des Sciences De L'éducation*, v.27, n.3, p.343-360, 2005.
- PARKER, F.D. A Fibonacci function. *Fibonacci Quarterly*, v.6, n.1, p.1-3, 1968.
- POSAMENTIER, A.S.; LEHMANN, I. *The fabulous fibonacci numbers*. New York: Prometheus Books, 2007.
- RAJI, W. *An introductory Course in Elementar Number Theory*. Ohio: University of Ohio, 2015.
- SIGLER, L.E. *Fibonacci's Liber Abaci: Leonardo Pisano's book of calculation*. New York: Springer, 2003.
- SMITH, D.E.; BEMAN, W.W. *A brief History of Mathematics*. Chicago: Open Court Publishing Company, 1900.
- SPICKERMAN, W.R. Binet's formula for the Tribonacci Sequence. *Fibonacci Quarterly*, v.20, n.2, p.118-120, 1982.
- STILLWELL, J. *Mathematics and it's History*. New York: Springer, 1989.
- TABAK, J. *Algebra: sets, symbols, and the language of thought*. New York: Facts on File, 2011.
- TATTERSALL, J.J. *Elementary number theory in nine chapters*. Cambridge: Cambridge University, 2005.
- VAJDA, S. *Fibonacci & Lucas numbers, and Golden Section*. New York: Ellis Horwood Limited, 1989.
- VINCENZI, G.; SIANI, S. Fibonacci-like sequences and generalized Pascal's triangles. *Int. J. Mathem. Educ. Sci. Technol.*, v.45, n.4, p.609-614, 2014.
- VOROB'EV, N.N. *Fibonacci numbers*. Oxford: Pergamon, 1961.
- WADDILL, E.M.; SACKS, L. Another generalized Fibonacci Sequences. *Fibonacci Quarterly*, v.5, n.3, p.209-223, 1967.
- WALSER, H. *The Golden Section*. New York: The Mathematical Association of America, 2001.